ORIGINAL　TEXT

大学入試数学研究

Ⅰ・Ⅱ・Ａ・Ｂ 受験編

八重塾

目 次

第１回　式の計算

$\boxed{1}$　次の式を因数分解せよ。[1]

(1) $x^2+4xy+4y^2-x-2y-2$

(2) $8x^2+16xy+6y^2-2x+y-1$

(3) $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$

(4) $x^3+y^3-3xy+1$

[1] $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$,　$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

(5) $x^6 - 1$

(6) $x^3 + (a-2)x^2 - (2a+3)x - 3a$ [2]

(7) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

[2] [類]$x^3 + 2(a+1)x^2 + (a^2+a-3)x - a^2 - 3a$ を因数分解せよ。

$\boxed{2}$ 次の計算をせよ。

(1) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

(4) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

(5) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}$

(6) $\sqrt{4+\sqrt{15}}$

(7) $\sqrt{7-3\sqrt{5}}$

(8) $\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$

(9) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$

$\boxed{3}$ $0<a<3$ のとき、$3\sqrt{a^2}+2\sqrt{a^2+4a+4}-2\sqrt{a^2-6a+9}$ の根号をはずせ。[3]

[3][類]$a<0$ のとき $\sqrt{1-2a-2\sqrt{a^2-a}}$ を簡単にせよ。

$\boxed{4}$　$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ のそれぞれの場合に、次の式を簡単にせよ。

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}$$

$\boxed{5}$ $x+y+z=3,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $(x-3)(y-3)(z-3)$

(2) $x^3+y^3+z^3$

$\boxed{6}$ i を虚数単位とし、 $x = 3 + \sqrt{3}i$ とするとき、$x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ の値を求めよ。[4]

$\boxed{7}$ 実数 x, y, z が関係式 $x+y+z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = xy+yz+zx$ を満たしているとき、x, y, z のうち少なくとも 1 つは 1 に等しいことを示せ。

[4] [類]$\alpha = 1 + \sqrt{3}i$, $\beta = 1 - \sqrt{3}i$ のとき $\left(\frac{\beta^2-4\beta+8}{\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}+2\alpha^n+4\alpha^{n-1}+\alpha^3-2\alpha^2+5\alpha-2}\right)^3$ はいくらか。(防衛医大)

$\boxed{8}$ 次の恒等式が成り立つように、定数 A, B, C, D の値を定めよ。

$$x^3 = A + B(x-1) + C(x-1)(x-2) + D(x-1)(x-2)(x-3)$$

$\boxed{9}$　3つの実数 x, y, z が

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=3 \\ x^5+y^5+z^5=15 \end{cases}$$

を満たす。このとき $x^2+y^2+z^2$ の値を求めよ。[5]

[5][類] 3つの実数 x, y, z が $x+y+z=0$, $x^3+y^3+z^3=1$, $x^4+y^4+z^4=2$ のとき $x^2+y^2+z^2$ の値を求めよ。

第２回　因数定理

☆剰余の定理

整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ になる。

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + C \tag{1}$$

$$P(\alpha) = C \tag{2}$$

☆因数定理

整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる $\rightleftharpoons P(\alpha) = 0$

剰余の定理の余り $C = 0$ の場合に相当する。

$\boxed{1}$ 次の式をを括弧内の式でわったときの余りを求めよ。

(1) $x^3 + 2x + 1 \quad (x-2)$

(2) $x^4 - 7x^2 + 12 \quad (x+1)$

$\boxed{2}$ 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

(2) $3x^3 + 5x^2 + 5x + 2$

$\boxed{3}$ $x^4+ax^3-13x^2+bx+24$ が $(x+2)(x-1)$ で割り切れるとき、実数 a, b の値を求めよ。

$\boxed{4}$ x の整式 $P(x)$ を、$x+2$ で割ると -4 余り、$x-3$ で割ると 6 余る。$P(x)$ を $(x+2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{5}$ x の整式 $P(x)$ を、x^2-3x+2 で割ると $-x+4$ 余り、x^2-4x+3 で割ると $3x$ 余る。$P(x)$ を x^2-5x+6 で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{6}$ $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+c$ を $x-1$ で割ると 5 余り、x^2+1 で割ると $2x+1$ 余る。実数 a, b, c の値を求めよ。

$\boxed{7}$ x^5-1 について[6]

(1) x^2-1 で割った余りを求めよ。

(2) x^2+1 で割った余りを求めよ。

(3) $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ。

[6] $P(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れる。$\iff$ $P(\alpha)=0$ かつ $P'(\alpha)=0$

$\boxed{8}$ x の整式 $P(x)$ を、$(x-1)^2$ で割ると $2x-3$ 余り、$x-2$ で割りきれる。$P(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{9}$ 多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか。（京大）[7]

[7] $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\boxed{10}$ $(x+2)(x-1)^2(x^2+x+2)$ を x^3-1 で割った余りを求めよ。

$\boxed{11}$ 多項式 $f(x)=x^4-ax^3-bx^2-cx+d$ は x^2+x+1 で割り切れ、x^2+1 で割ると余りが 10 となる。このとき自然数 a, b, c, d の値を求めよ。（近大）[8]

[8][類]$x^2-x+1=0$ の解を α とおくとき $f(\alpha)=(\alpha-1)^{100}+\alpha^{100}+1$ の値を求めよ。

$\boxed{12}$ $4x^3 - 4x^2 + 1$ が係数が有理数の範囲では因数分解できないことを証明せよ。[9]

$\boxed{13}$ 2 次方程式 $x^2 + 3x + 1 = 0$ は有理数の解を持たないことを証明せよ。

[9] x の整式 $f(x) = 0$ の解の候補は $\pm \frac{c\text{ の約数}}{a\text{ の約数}}$ しかない。

$\boxed{14}$ $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式 $f(x) = 0$ の重複も込めた 4 つの解のうち、2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。（京大）[10]

---

[10][類] $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}}-1}$ とする。（大阪教育大）

(1) 整数を係数とする 3 次方程式で、α を解にもつものがあることを示せ。

(2) α は整数であることを示せ。また、その整数を答えよ。

第３回　方程式

$\boxed{1}$　次の方程式を解け。

(1) $a^2x + 1 = ax + a$

(2) $\begin{cases} xy + x + y = -1 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$

$$(3)\quad \begin{cases} x+y+z=2 \\ xyz=-2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=8 \end{cases}$$

$\boxed{2}$　２つの２次方程式 $x^2+kx+3=0$, $x^2+x+3k=0$ が共通な実数解をもつように k の値を定め、そのときの共通解を求めよ。

$\boxed{3}$　２つの方程式 $x^3+6x+20=0$, $x^2-2x+a=0$ について

(1) ２つの解を共有するように、定数 a を定めよ。

(2) ただ１つの解を共有するように、定数 a を定めよ。

$\boxed{4}$ x, y の連立方程式 $-4x-2y=kx$, $3x+3y=ky$ が $x=0$, $y=0$ 以外の解をもつとき。
k の値を求めよ。

$\boxed{5}$ $x^2+2x+3=0$ の解を α, β とするとき $(\alpha^3+\alpha^2+1)(\beta^3+\beta^2+1)$ の値を求めよ。[11] [12]

[11][類 1] $x^2+2x+3=0$ の解を α, β とするとき $\alpha^5+\beta^5$ の値を求めよ。
[12][類 2] 方程式 $x^{199}+10x-5=0$ のすべての解（199 個）の 199 乗の和を求めなさい。

$\boxed{6}$ $x^3+kx^2+kx+1=0$ の解がすべて実数であるように、k の値の範囲を求めよ

$\boxed{7}$ $x^4+ax^2+4=0$ が相異なる 4 つの実数解をもつための a の値の範囲を求めると（ア）で、実数解の一番小さい解は（イ）である。

$\boxed{8}$　２次方程式 $x^2 + ax + 1 = 0$ は異なる２つの解をもち、それらの解は４次方程式 $x^4 + (a + 1)x^3 + (a + b + 1)x^2 + (ab + a + b)x + a^2 + b^2 - 1 = 0$ の解でもある。定数 a, b の値と４次方程式の解をすべて求めよ。

第４回　不等式

$\boxed{1}$　次の不程式を解け。

(1) $|(x+1)(x-3)| \leqq x+2$

(2) $\frac{(x-2)(x-1)}{x-3} \geqq 0$

(3) $-x^2 + 3x + 7 \geqq |x-1| + |x-2|$

(4) $|x^2 - 2x - 3| \geqq 2|x-2|$

(5) $x^2-(a+1)x+a<0$

(6) $ax^2-x-a^2x+a>0$ ただし $a>0$ とする。

$\boxed{2}$　次の不程式を証明せよ。

(1) $x^2 - xy + y^2 \geqq 0$ （２通りの証明）

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geqq 0$ （２通りの証明）

$\boxed{3}$ $x^2+2y^2+2xy+2x-2y+8$ の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ $x+2y+3z=1$ のとき $x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。

☆相加相乗平均

$\boxed{\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}}$ （等号成立は $a=b$ のとき）[13]

$\boxed{a+b \geqq 2\sqrt{ab}}$ の形で使うことが多い。

$a>0$ かつ $b>0$ のときだけ使えることに注意する。

また $\boxed{\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}}$ や $\boxed{\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}}$ も成り立つ。

[13]英語が 50 点で数学が 50 点のときは相加平均も相乗平均も 50 点で等しい。

ところが、英語が 10 点で数学が 90 点のときは相加平均は 50 点だけれども、相乗平均は 30 点になってしまう。

一般に (相加平均) $\geqq$ (相乗平均) である。等号成立は (英語の点数) $=$ (数学の点数) のときである。

$\boxed{5}$　x, y が正の数のとき相加相乗平均 $\dfrac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$ を証明せよ。

$\boxed{6}$　x, y, z が正の数のとき相加相乗平均 $\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ を証明せよ。[14]

[14][類]n を正の整数とする。実数 x, y, z に対する方程式

$$x^n + y^n + z^n = xyz$$

を考える。(東大)

(1) $n=1$ のとき、方程式を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で、$x \leqq y \leqq z$ となるものをすべて求めよ。

(2) $n=3$ のとき、方程式を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しないことを示せ。

$\boxed{7}$ x, y, z が正の数のとき不等式を証明せよ。ただし (5) と (6) は ◯ に自分で数値を書き込んで証明せよ。

(1) $x + \dfrac{1}{x} \geqq 2$

(2) $(x + \dfrac{1}{x})(y + \dfrac{1}{y}) \geqq 4$

(3) $(x + \dfrac{4}{x})(y + \dfrac{9}{y}) \geqq 24$

(4) $(\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y})(\dfrac{y}{x} + \dfrac{4x}{y}) \geqq 9$

(5) $(x+\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{4}{y})(z+\dfrac{9}{z}) \geqq \bigcirc$

(6) $(x+\dfrac{4}{x})(x+\dfrac{9}{x}) \geqq \bigcirc$ について以下のＡ君とＢ君の解答を読み、どちらが正しくてどちらが誤っているか理由をつけて説明せよ。

□Ａ君の解答

相加・相乗平均より

$x+\frac{4}{x} \geqq 2\sqrt{x \times \frac{4}{x}} = 4$ かつ

$x+\frac{9}{x} \geqq 2\sqrt{x \times \frac{9}{x}} = 6$ より

$(x+\frac{4}{x})(x+\frac{9}{x}) \geqq 24$

□Ｂ君の解答

相加・相乗平均より

$(x+\frac{4}{x})(x+\frac{9}{x}) = x^2+\frac{36}{x^2}+13 \geqq 2\sqrt{x^2 \times \frac{36}{x^2}}+13 = 25$ なので

$(x+\frac{4}{x})(x+\frac{9}{x}) \geqq 25$

$\boxed{8}$ $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}$ の最大値、最小値を求めよ。[15]

$\boxed{9}$ $\dfrac{x^4-2x^3+x^2+8}{x^2-x+1}$ の最小値を求めよ。[16]

[15][類] $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1\ \ (0<x,\ \ 0<y)$ のとき xy の最小値を求めよ。

[16][類] 実数 t は $0<t<1$ を満たすとし、座標平面上の 4 点 $O(0,\ \ 0)$, $A(0,\ \ 1)$, $B(1,\ \ 0)$, $C(t,\ \ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle ACO=\angle BCD$ となるように定める。t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。(東大)

$\boxed{10}$ 相加相乗平均を使うことにより $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqq 9abc$ であることを証明せよ。ただし $a > b > c > 0$ とする。

$\boxed{11}$ 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $a^2 + \dfrac{1}{a^2} \geqq a + \dfrac{1}{a}$ ただし $a > 0$ とする。

(2) $a^3 + \dfrac{1}{a^3} \geqq a^2 + \dfrac{1}{a^2}$ ただし $a > 0$ とする。

$\boxed{12}$ $|a| < 1,\ \ |b| < 1,\ \ |c| < 1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

(1) $ab + 1 > a + b$

(2) $abc + 2 > a + b + c$

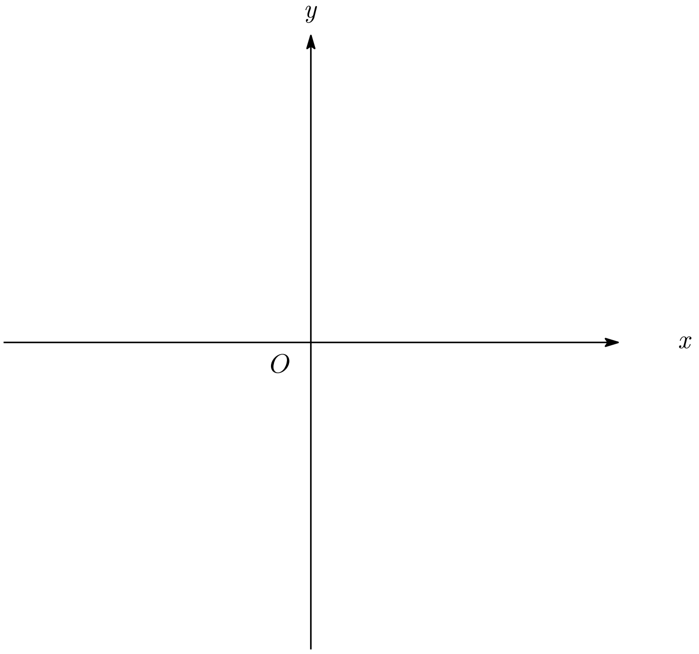
$\boxed{13}$ a, b, c は $a < b < c$, $a + b + c = 0$ を満足する実数とするとき、不等式

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(c - a)^2} < \frac{2}{3}$$

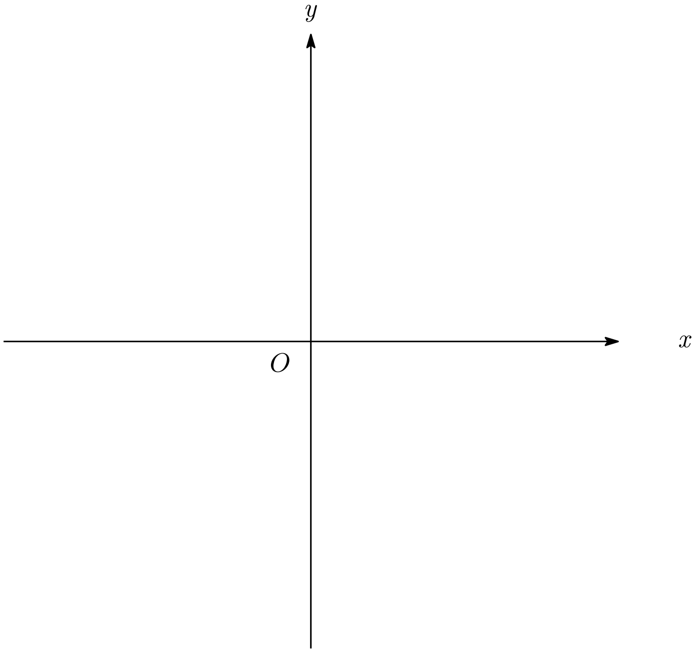
が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{14}$ a, b は実数、$a \neq b$ のとき、次の式の大小関係を調べよ。またグラフを使ってその意味を論ぜよ。

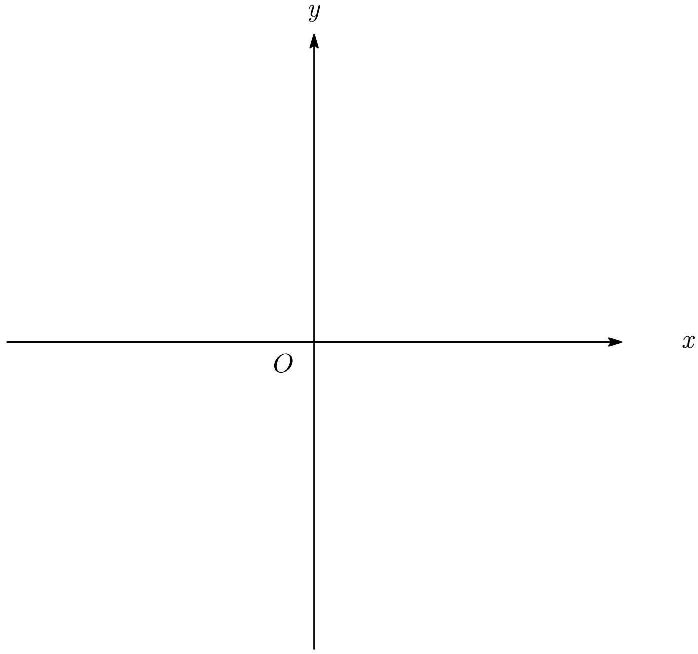
(1) $(\frac{a+b}{2})^2$, $\frac{a^2+b^2}{2}$



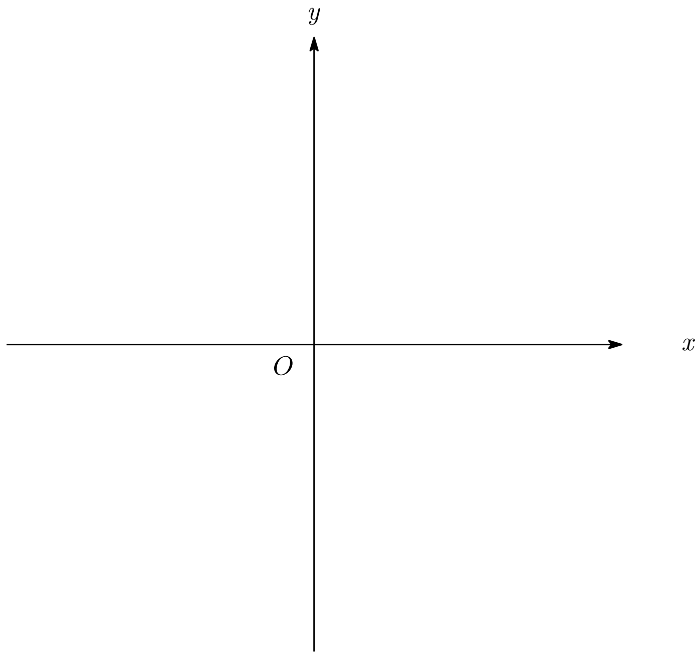
(2) $(\frac{a+2b}{3})^2$, $\frac{a^2+2b^2}{3}$



(3) $s+t=1$ のとき sa^2+tb^2, $(sa+tb)^2$



(4) $\log(\frac{a+b}{2})$, $\frac{\log a+\log b}{2}$



$\boxed{15}$ 正数 a, b, x, y を考える。$a+b=1$ ならば、すべての自然数 n に対して不等式 $(ax+by)^n \leqq ax^n + by^n$ が成立することを証明せよ。（慶應大）

$\boxed{16}$ 不等式 $x^2+y^2+z^2 \geqq tx(y-z)$ がすべての実数 x, y, z に対して成り立つような実数 t の値の範囲を求めよ。

第５回　２次関数（１）

$\boxed{1}$　次の条件を満たす２次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を求めよ。

(1) 頂点が $(2,\ 1)$ で、点 $(6,\ -3)$ を通るもの。

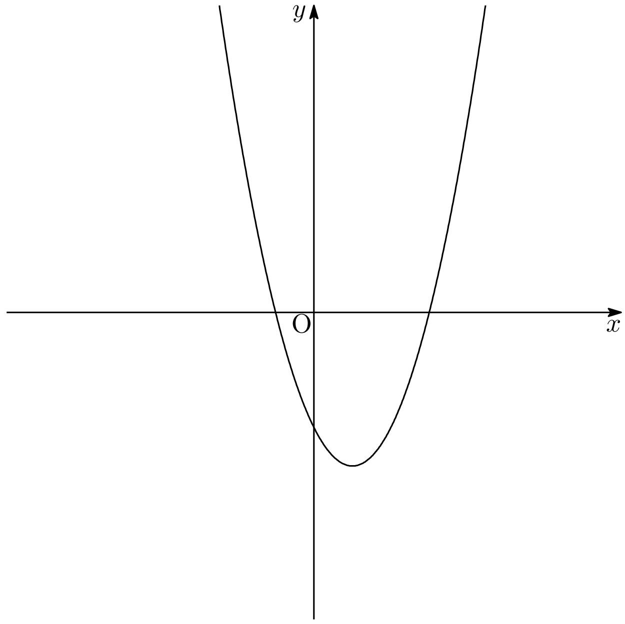
(2) ２点 $(3,\ 3)$, $(1,\ -1)$ を通り、頂点が $y = -x$ 上にある。

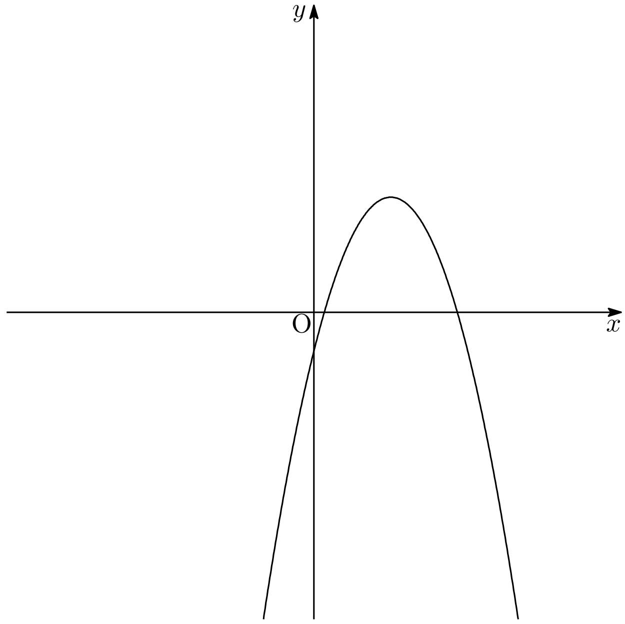
(3) 2 次関数 $g(x) = x^2 + 2x$ を平行移動して $(3,\ 0)$, $(5,\ 0)$ を通るようにしたもの。

(4) 頂点 $(2,\ -9)$ で、x 軸から切り取る線分の長さが 12 であるもの。

(5) 最小値が -1 で、2 点 (0, 3), (3, 0) を通るもの。

$\boxed{2}$　２次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次のグラフのとき a，b，c，$b^2 - 4ac$ の符号を述べよ。





$\boxed{3}$ $x^2 - 2ax + a + 12 = 0$ について以下の条件のとき a の範囲を求めよ。

(1) 異なる 2 つの正の解をもつ。

(2) 異なる 2 つの負の解をもつ。

(3) 異符号。

$\boxed{4}$ 2次の整式 $f(x)=0$ （ x^2 の係数は正とする）について次のときの条件を表示せよ。

(1) $f(x)=0$ がともに 1 より大きい異なる 2 つの実数解を持つ条件を求めよ。

(2) $f(x)=0$ がともに -1 より小さい異なる 2 つの実数解を持つ条件を求めよ。

(3) $f(x)=0$ の実数解が 1 つは 2 より大きく 1 つは 2 より小さいときの条件を求めよ。

(4) $f(x)=0$ が $1<x<3$ の範囲に 2 つの異なる実数解を持つ条件を求めよ。

(5) $f(x)=0$ が $1<x<3$ の範囲にただ 1 つの実数解を持つ条件を求めよ。（他の解は範囲の外にあるとき）

(6) $f(x)=0$ が $1<x<3$ の範囲にただ 1 つの実数解を持つ条件を求めよ。（重解も含めるとき）

(7) $f(x)=0$ の実数解が 1 つは 5 より大きく 1 つは 2 より小さいときの条件を求めよ。

(8) $f(x)=0$ が $1<x<2$ の範囲と $2<x<3$ の範囲に一つずつ実数解を持つ条件を求めよ。

(9) $f(x)=0$ が $1<x<2$ の範囲と $5<x<6$ の範囲に一つずつ実数解を持つ条件を求めよ。

$\boxed{5}$ $ax^2 + 2bx - a + 2 = 0$ が $x > 0$ でただ一つの解を持つ条件を求め図示せよ。ただし $a > 0$ とする。

$\boxed{6}$ 直線 $y = -tx - t^2$ がある。t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき、この直線が通過する xy 平面の領域を求め図示せよ。（神戸大）[17]

[17][類]C_1： $x^2+y^2=2$ と C_2： $(x-a)^2+(y-1)^2=2a^2+2$ の 2 交点を通る直線を l とする。実数 a が $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲で変化するとき、直線 l の通過する領域を図示せよ。

$\boxed{7}$ m, n を自然数とするとき $2x^2-2(m-1)x+n-2=0$ が $0<x<2$ の範囲で異なる 2 つの解をもつとき m, n の値と 2 つの解を求めよ。

$\boxed{8}$ 放物線 $f(x) = x^2 + ax + b$ が 2 点 $A(1,\ 1)$, $B(2,\ 3)$ を結ぶ線分と共有点をもつとき、点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

第６回　２次関数（２）

$\boxed{1}$ $a \geqq 0$ に対して関数 $f(x) = |x^2 - 2x|$ の集合 $\{x | a \leqq x \leqq a+1\}$ における最大値を $g(a)$ とする。

(1) $g(a)$ を a の式で表せ。

(2) $b = g(a)$ のグラフをかけ。

$\boxed{2}$ $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲において、2 次関数 $y = x^2 - 2ax + 1$ の最大値・最小値を次の各場合に分けて求めよ。

(1) $a \leqq 0$

(2) $0 < a < 1$

(3) $a = 1$

(4) $1 < a < 2$

(5) $2 \leqq a$

$\boxed{3}$ $f(x)=x+a,\ \ g(x)=x^2-x+2$ とする。次の条件が成り立つ a の値の範囲をそれぞれ求めよ。（慶應大）

(1) $f(x)<g(x)$ が、ある実数 x に対して成り立つ。

(2) $f(x)<g(x)$ が、すべての実数 x に対して成り立つ。

(3) $f(x)>g(x)$ が、ある実数 x に対して成り立つ。

(4) $f(x)>g(x)$ が、すべての実数 x に対して成り立つ。

$\boxed{4}$

(1) a が実数のすべての範囲を動くとき、x の２次関数 $7a^2-3a+1+6ax-x^2$ の最大値 $m(a)$ の最小値を求めよ。

(2) a が $3a^2-2a-1 \leqq 0$ の範囲を動くときの $m(a)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{5}$ $x-3y \geqq -6,\ \ x+2y \geqq 4,\ \ 3x+y \leqq 12$ のとき $x+y$ と x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。[18]

[18][類] 座標平面上の点 $P(x,\ \ y)$ が $4x+y \leqq 9,\ \ x+2y \geqq 4,\ \ 2x-3y \geqq -6$ の範囲を動くとき、$2x+y,\ \ x^2+y^2$ のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。（京大）

$\boxed{6}$ (1) $x+y=1$ のとき x^2+y^2 の最小値を求めよ。

(2) $x^2+y^2=1$ のとき $x+y$ の最大値、最小値を求めよ。

(3) $x^2+y^2=1$ のとき $2x^2-x+y^2$ の最大値、最小値を求めよ。

$\boxed{7}$ $x > 3$ のとき $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$ の最小値を求めよ。[19]

[19] □（与式）$= k$ とおき二次関数に直して考える。□帯分数に直して相加相乗平均で考える。
（参考） $\frac{x}{x^2+4}$ $(x > 0)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{8}$ 放物線 $y = x^2$ 上の頂点と異なる点 $P(a,\ a^2)$ における法線が放物線と交わる他の点を Q とし、P における接線と Q における接線との交点を R とする。P が第 1 象限内を動くとき、三角形 PQR の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{9}$　１辺の長さが１ cm の正四面体 $ABCD$ の辺 AB, AC, AD 上を、それぞれ点 P, Q, R が毎秒１ cm, ２ cm, ４ cm の速さで往復している。３点 P, Q, R は同時に点 A を出発したとして、t 秒後の点 P, Q, R について

(1) $AP = AQ = AR$ となるときの t の値を求めよ。

(2) $\frac{1}{4} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ において $PQ^2 + QR^2 + RP^2$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{10}$ $13x^2 - 8xy + 7y^2 = 1$ のとき $x^2 + y^2$ の最大値、最小値を求めよ。

第７回　整数問題

$\boxed{1}$　５進法、９進法で表すと、ともに３桁で数字の並び方が逆になるような自然数は、10 進法で表すといくつになるか。

$\boxed{2}$　$0.2\dot{1} \div 0.\dot{5}\dot{7}$ を計算し、結果を循環小数で表せ。

$\boxed{3}$ (1) 整数 n に対して、$2n^3 - 3n^2 + n$ が 6 の倍数であることを示せ。

(2) $m,\ n$ が整数のとき、$m^3n - mn^3$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

(3) n が整数のとき、$n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n$ は 24 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{4}$ n を正の整数とする。次の問いに答えよ。[20]

(1) n を 7 で割った余りが 2 または 4 であるとき n^2+n+1 は 7 で割り切れることを示せ

(2) $n>1$ のとき n^7-n は 42 で割り切れることを示せ。

[20][類] 任意の整数 n に対し、n^9-n^3 は 9 で割り切れることを示せ。(京大)

$\boxed{5}$ (1) $xy-3x-4y=2$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

(2) $5xy-x-2y=3$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

$\boxed{6}$ (1) 正の整数 x，y，z が $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，$(x \leqq y \leqq z)$ を満たすとき $(x,\ y,\ z)$ の組を全て求めよ。

(2) 正の整数 x，y，z が $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<1$，$(x \leqq y \leqq z)$ を満たすとき $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ の最大値を求めよ。

$\boxed{7}$ （一橋大）[21]

(1) 自然数 x, y は、$1 < x < y$ および

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) = \frac{5}{3}$$

をみたす。x, y の組をすべて求めよ。

(2) 自然数 x, y, z は、$1 < x < y < z$ および

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) = \frac{12}{5}$$

をみたす。x, y, z の組をすべて求めよ。

[21] [類]$\triangle ABC$ で $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ が整数のとき、その値を求めよ。

$\boxed{8}$

(1) $6x^2+xy-2y^2-5x+6y+k$ が x, y の 1 次式の積に因数分解されるように、定数 k の値を求めよ。

(2) $6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

$\boxed{9}$ (1) $\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法を用いて証明せよ。[22][23]

(2) $3+2\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法を用いて証明せよ。

[22][背理法] ある命題の否定を真と仮定すると、矛盾が出ることを明らかにして、命題が真であることを証明する方法。

[23][類] 次の数が無理数であることを背理法を用いて証明せよ。
(1) $\sqrt[3]{2}$ (2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (3) $\log_2 3$ (4) $\tan 1^\circ$

$\boxed{10}$ 実数 x の少数部分を、$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし、これを記号 $< x >$ で表す。実数 a に対して、無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n を次のように順次定める。（東大）[24]

$$(i)\ \ a_1 =< a >$$

$$(ii)\ \ \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき、} a_{n+1} =< \frac{1}{a_n} > \\ \quad a_n = 0 \text{ のとき、} a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

[24][類] $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ の値を求めよ。

$\boxed{11}$ n を任意の自然数とするとき、n と n^5 の一の位の数字は一致することを証明せよ。次に具体的に表にして確認せよ。また 2017^{2017} の一の位の数字を求めよ。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

$\boxed{12}$ ２以上の自然数 n に対し、n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。（京大）[25] [26]

[25] n と $n+2$ がともに素数であるものを双子素数という。3 と 5 や 11 と 13 などの例がある。双子素数が無限にあるかどうかは未解決問題である。

[26] [類]n を自然数とする。n, $n+2$, $n+4$ がすべて素数であるのは $n=3$ の場合だけであることを示せ。（早稲田大）

$\boxed{13}$ a, b, c は整数で $a^3+2b^3+4c^3=2abc$ とする。(御茶ノ水大)

(1) a, b, c はいずれも偶数であることを示せ。

(2) $a=b=c=0$ であることを示せ。[27]

[27]無限降下法という。

$\boxed{14}$ 次の数を 8 で割り、余りを求めよ。ただし、n は自然数である。（自治医大）

(1) $3^{2n}-1$

(2) $3^{2n-1}+1$

(3) 3^n

$\boxed{15}$ $(2^4)!$ は 2 で何回割り切れるか。[28]

$\boxed{16}$ p を素数、n を正の整数とするとき、$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。（京大）

[28][類]219! は 2 で何回割り切れるか。（早稲田大）

☆ $ax+by=c$ に関する問題

$\boxed{17}$ 等式 $5x-3y=4$ を満足する整数 x, y の組を求めよ。[29]

$\boxed{18}$ 等式 $212x+13y=2$ を満足する整数 x, y の組を求めよ。

[29] □ $5x-3y=1$ になる x, y を一組見つける。
□ $5x-3y=0$ になる x, y を見つけ m 倍して加える。

$\boxed{19}$ (1) 等式 $14x - 11y = 7$ を満足する整数 $x,\ y$ の組を求めよ。

(2) そのような $x,\ y$ の組のうち、$x^2 + y^2$ が最も小さくなるものを求めよ。

(3) 等式 $14x - 12y = 7$ については、これを満足する整数 $x,\ y$ の組は存在しないことを証明せよ。

$\boxed{20}$ $2x + 3y$ が 17 で割り切れるような整数の組 $(x,\ y)$ 全体の集合と、$9x + 5y$ が 17 で割り切れるような整数の組 $(x,\ y)$ 全体の集合は等しいことを証明せよ。また、この集合に属する整数の組 $(x,\ y)$ を 2 つあげよ。

$\boxed{21}$ どのような負でない２つの整数 m と n を用いても $x = 3m + 5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。（阪大）

$\boxed{22}$ xy 平面上、x 座標、y 座標がともに整数であるような点 $(m,\ n)$ を格子点とよぶ。各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており、傾き $\frac{2}{5}$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。（東大）[30]

[30]定理「$a,\ b$ が互いに素のとき、$am + bn$ （$m,\ n$ は整数）は任意の整数値をとることができる。」

$\boxed{23}$ 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx$ において、$f(1)$, $f(2)$ が、ともに整数となるとき、すべての整数 n に対して $f(n)$ は整数であることを証明せよ。

$\boxed{24}$ $f(x) = 2x^3 + ax^2 + x$ （ a は整数）とする。方程式 $f(x) = 0$ が 0 でない整数解をもつとき、次の問いに答えよ。

(1) 整数 a の値を求めよ。

(2) すべての整数値 x に対して、$f(x)$ は 6 の倍数になることを示せ。

$\boxed{25}$ a, b, c, d を整数とする。整式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ において、$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ がいずれも 3 で割り切れないならば、方程式 $f(x) = 0$ は整数解をもたないことを証明せよ。（三重大）

$\boxed{26}$ 整数を係数とする 3 次の整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ について（京大）

(1) 有理数 α が方程式 $f(x) = 0$ の 1 つの解ならば、α は整数である。

(2) ある自然数 $k \ (> 1)$ に対して、k 個の整数 $f(1),\ f(2),\ \cdots, f(k)$ のどれもが k で割り切れなければ、方程式 $f(x) = 0$ は有理数の解をもたない。

$\boxed{27}$ 白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても、次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ。
その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと、残りは白石と黒石が同数となる。ただし、碁石が一つも残らない場合も同数とみなす。（東大）

$\boxed{28}$ $n,\ k$ は自然数で $k \leqq n$ とする。穴のあいた $2k$ 個の白玉と $2n-2k$ 個の黒玉にひもを通して輪を作る。このとき適当な 2 箇所でひもを切って n 個ずつの 2 組に分け、どちらの組も白玉 k 個、黒玉 $n-k$ 個からなるようにできることを示せ。（京大）

$\boxed{29}$ p を素数として次の問いに答えよ。（京大）[31]

(1) ${}_pC_1$, ${}_pC_2$, ${}_pC_3$, $\cdots$, ${}_pC_{p-1}$ はいずれも p で割り切れる。

(2) すべての自然数 n に対して $n^p - n$ は p で割り切れる。[32]

---

[31]☆フェルマーの小定理
「P が素数であるとき $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ つまり $x^p \equiv x \pmod p$ が成り立つ。」
[32]□ $(m+1)^p = m^p + {}_pC_1 m^{p-1} + {}_pC_2 m^{p-2} + \cdots + {}_pC_{p-1} m + 1$ を利用。
□ n, p を任意の自然数とするとき、$n^5 \equiv n \ (mod\ \ 5)$ であることを利用して n^p と n^{p+4} の 1 の位の数字は一致することを証明せよ。

第８回　三角関数

☆三角比の相互関係

- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

☆ $90^\circ \pm \theta, 180^\circ \pm \theta$ の公式

- 90° の奇数倍のときは sin と cos が入れ替わる。90° の偶数倍のときは sin と cos はそのままである。
- 元の式の θ に 10° （第１象現の角なら何度でも良い。）を入れたときの符号と一致するように、変換後の符号を決める。
- tan については憶えない。$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用する。
- $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$
- $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta \quad \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(90^\circ + \theta) = \dfrac{\sin(90^\circ + \theta)}{\cos(90^\circ + \theta)} = \dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

☆正弦定理

- $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$　R は外接円の半径

☆余弦定理

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

☆三角形の面積の公式

- ２辺とそのはさむ角 $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{abc}{4R}$
- 内接円の半径を r として $S = \dfrac{1}{2}r(a+b+c)$
- 原点と座標 $P(x_1, y_1)$ 、$Q(x_2, y_2)$ で囲まれる面積 $S = \dfrac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$
- ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ によって作られる三角形の面積 $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \{\vec{a}\cdot\vec{b}\}^2}$
- ヘロンの公式 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ として $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ が簡単な有理数になるとき以外、あまり使えない。

☆加法定理

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

☆倍角の公式

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

☆半角の公式

- $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$
- $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$
- $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

☆ 3 倍角の公式

- $\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$
- $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

☆三角関数の合成

- $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$
  ただし $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\boxed{1}$ 四角形 $ABCD$ において、$AB=2,\ BC=1+\sqrt{3},\ CD=\sqrt{2},\ \angle ABC=60^\circ,\ \angle BCD=75^\circ$ のとき、辺 DA の長さを求めよ。

$\boxed{2}$ $a=5,\ b=6,\ c=4$ の $\triangle ABC$ の内接円の半径を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の等式が成り立つとき、$\triangle ABC$ はどんな形の三角形か。[33]

(1) $a^2 \tan C = c^2 \tan A$

(2) $b\cos^2 A + c\cos^2 C = b\cos^2 B + c\cos^2 A$

[33] 辺と角の混じった問題においてはどちらかに揃える。辺に揃えることが多い。角⇒辺

$\boxed{4}$ 円に内接する四角形 $ABCD$ において $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$, $DA = 5$ である。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\cos A$ の値を求めよ。

(2) BD の長さを求めよ。

(3) 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ $AB=\frac{6\sqrt{5}}{5}$, $BC=6$ である $\triangle ABC$ において $\angle A$ の三等分線と BC の交点を B に近いほうから D, E とするとき、$BD=2$, $DE=1$, $EC=3$ であった。

(1) AE の長さを求めよ。

(2) AD の長さを求めよ。

(3) AC の長さを求めよ。

$\boxed{6}$

(1) $\triangle ABC$ において $BC = a,\ \ CA = 3a-2,\ \ AB = 5a-4$ を 3 辺とする三角形が作れる a の条件を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ が鈍角三角形で外接円の半径が $\frac{\sqrt{3}}{3}(5a-4)$ のとき a の値を求めよ。

$\boxed{7}$ $|\cos^2\theta - 4\cos\theta| = k$ が解を持つような定数 k について解の個数で場合分けせよ。ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。[34]

[34][類] $0 \leqq \theta < 2\pi$ とし、a は定数とする。$\cos 3\theta - \cos 2\theta + 3\cos\theta - 1 = a$ を満たす θ の値はいくつあるか。a の値によって分類せよ。（京大）

$\boxed{8}$ $f(\theta)=5\sqrt{3}\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。[35] [36]

[35][類1] $5\cos\theta+6\sin\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ の最大値と最小値を求めよ。
[36][類2] 関数 $y=a\sin x+b\cos x$ は $x=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値をとり、また、最小値は -5 である。定数 a, b の値を求めよ。

$\boxed{9}$ 座標平面において、y 軸上に点 $A(0,\ \ 3)$ と点 $B(0,\ \ 1)$ をとり、x 軸上に点 $P(p,\ \ 0)$ をとる。$\angle APB = \theta$ とするとき θ の最大値とそのときの p の値を求めよ。[37]

[37][類] 2 直線 $y = 2x + 1,\ \ y = \frac{1}{3}x + 2$ のなす角 θ を求めよ。

$\boxed{10}$ $0 \leqq \alpha < 2\pi$, $0 \leqq \beta < 2\pi$ とする。$\sin\alpha + \cos\beta = \sqrt{2}$, $\cos\alpha + \sin\beta = -\sqrt{2}$ のとき[38]

(1) $\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(2) α, β の値を求めよ。

[38][類] $\sin x + \sin y = \dfrac{1}{2}$, $\cos x - \cos y = \dfrac{1}{3}$ のとき、$\cos(x+y)$ の値を求めよ。

$\boxed{11}$ $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ のとき $\alpha + \beta + \gamma$ の値をすべて求めよ。ただし $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$ とする。[39]

[39] [類] $x + y = \frac{3}{4}\pi$ のとき $(\tan x - 1)(\tan y - 1)$ の値を求めよ。

$\boxed{12}$ 次の関数は周期関数であるか否かを、理由をつけて答えよ。また、周期関数である場合には、その周期を求めよ。（京大）

(1) $f(x) = 2^{\sin x}$

(2) $f(x) = \sin(\sin x)$

(3) $f(x) = \cos(\sin x)$

(4) $f(x) = \sin(x^3)$

$\boxed{13}$ 原点 O を中心とする半径 1 の円上に 4 点 $A(1,\ 0)$, $B(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を取る。$\triangle ABP$ の面積を S_1 、$\triangle ACP$ の面積を S_2 とするとき $S_1 - S_2$ の面積の最大値を求めよ。ただし P は BC の弧上（A を含まない方）にあるものとする。

第９回　指数・対数

☆累乗根

$a^{\frac{1}{n}} \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a}$　　$a^{-n} \Longleftrightarrow \frac{1}{a^n}$　　$a^0 \Longleftrightarrow 1$

$x^a \times x^b = x^{a+b}$　　$(x^a)^b = x^{ab}$

$a^m\sqrt{b}$ と $a\sqrt[m]{b}$ を区別して書くこと。

☆対数

$$a^x = y \Longleftrightarrow \log_a y = x$$

a を底、y を真数と呼ぶ。
a の範囲は $0 < a < 1$, $1 < a$ であり、これを底の条件と呼ぶ。
y の範囲は $0 < y$ であり、これを真数条件と呼ぶ。

☆対数の公式

(1) $\log_a 1 = 0$

(2) $\log_a a = 1$

(3) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

(4) $\log_a M - \log_a N = \log_a \dfrac{M}{N}$

(5) $\log_a M^N = N \log_a M$

(6) $\log_M N = \dfrac{\log_a N}{\log_a M}$

(7) $\log_a b \log_b c = \log_a c$

(8) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

(9) $a^{\log_a N} = N$

$\boxed{1}$ 次の計算をせよ。

(1) $2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{1}{2}}$

(2) $(\frac{2}{3})^2 \times (\frac{4}{3})^{-3}$

(3) $(\frac{4}{5})^{-1} \times (\frac{5}{2})^2 \div 2^{-1}$

(4) $a^5 \div (a^{-3}b^2)^{-1}$

(5) $(xy^{-1})^{-2} \times (xy^{-1})^2$

(6) $\sqrt[3]{a}b \div \frac{\sqrt{b}}{a} \times \sqrt[3]{\frac{b}{a^4}}$

(7) $\log_2 3 - \log_2 \frac{9}{8} + \log_2 6$

(8) $\log_2 6 \log_6 12 \log_{12} 16$

(9) $\frac{\log_2 27}{\log_2 \sqrt{3}}$

(10) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$

$\boxed{2}$ $\log_{10} 2 = 0.3010,\ \ \log_{10} 3 = 0.4771$ のとき次の値を求めよ。[40]

(1) $\log_{10} 1$

(2) $\log_{10} 2$

(3) $\log_{10} 3$

(4) $\log_{10} 4$

(5) $\log_{10} 5$

(6) $\log_{10} 6$

(7) $\log_{10} 7$

(8) $\log_{10} 8$

(9) $\log_{10} 9$

(10) $\log_{10} 10$

$\boxed{3}$ $\log_{10} 7$ を小数第二位まで求めよ。[41]

[40]「サレジオ死なない」と覚えよう！

[41] $48 < 7^2 < 50$

$\boxed{4}$ (1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

(2) n が正の整数のとき、$\log_2 n$ が整数でない有理数となることがあるかどうか調べよ。

$\boxed{5}$ 次の方程式を解け。

(1) $2^{3x+2}-4^x+2^{x+1}-5=0$

(2) $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x+(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x=8$

$\boxed{6}$ $x=\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}})$ のとき、$(x+\sqrt{x^2+1})^n$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ $5^x=7^y=10$ のとき、$10^{\frac{x+y}{xy}}$ の値を求めよ。[42]

[42][類] 素数 a, b, c $(a<b<c)$ と実数 x, y, z について

$$a^x=b^y=c^z=30,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

が成り立つとき a, b, c の値を求めよ。

$\boxed{8}$ $3^{\frac{2}{3}\log_9 8}$ の値を求めよ。[43]

$\boxed{9}$ $x = 1 + \log_{\frac{1}{2}} 3$ のとき、$2^{-x} + 4^{x}$ の値を求めよ。

[43]「$a^{\log_a x} = x$」 この結果は覚えておこう！

$\boxed{10}$ 3つの数 2, $3\log_5 3$, $4\log_5 2$ について小さい順に並べよ。

$\boxed{11}$ $1 < a < b < a^2$ のとき、$\log_a b$, $\log_b a$, $\log_a \frac{a}{b}$, $\log_b \frac{b}{a}$, $\frac{1}{2}$ について小さい順に並べよ。

$\boxed{12}$ 次の方程式を解け。

(1) $\log_2\{\log_3(\log_4 x)\} = 1$

(2) $x^{2\log_{10} x} = \frac{1}{100}x^5$

$\boxed{13}$ 次の不等式を解け。[44]

(1) $1+\log_9(1+x)(1-x) \leqq \log_3(3+x)$

(2) $\log_2(x^2+4) - 2\log_4 x \geqq 4$

[44][真数条件]真数 >0 を忘れないように。

$\boxed{14}$ (1) $2^{10} = 1024 > 1000$ を利用して $\log_{10} 2 > 0.3$ を示せ。

(2) $\log_{10} 7 < 0.9$ を示せ。

(3) $\log_{10} 13 > 1.1$ を示せ。

$\boxed{15}$ [45]

(1) 18^{35} の桁数を求めよ。

(2) 18^{35} の最高位の数字が 8 であることを示せ。

$\boxed{16}$ $(\frac{1}{45})^{54}$ で、少数以下最初に 0 でない数字が現れるのは、少数第何位で、その数字は何か。

[45][類] $\displaystyle\sum_{n=0}^{99} 3^n$ の桁数を求めよ。（東工大）

$\boxed{17}$ 関数 $f(x) = 3^{2x} - a3^{x+1} + 2a^2$ が正と負に一つずつ解を持つ条件を求めよ。

$\boxed{18}$ 実数係数の方程式 $a \cdot 4^x + b \cdot 2^{x+1} - a + 2 = 0$ について、この方程式が異なる 2 つの実数解 $x = r$, $r \log_2 3$ をもつとき、a, b の値を r で表せ。

$\boxed{19}$ $x > 0,\ \ y > 0,\ \ xy^3$ が一定のとき $\log_{10} x \log_{10} y$ が最大となる条件を求めよ。

$\boxed{20}$ a を $\frac{3}{2}$ 以上 2 以下の実数として $f(x) = 4^x - 2^{x+1}a + a$ とする。$f(x)$ の定義域を $\{x | -1 \leqq x \leqq 1\}$ としたとき、$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{21}$ 次の不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ。[46]

$$\log_x y \leqq \log_y x$$

[46][類]$x,\ y$ は $x \neq 1,\ y \neq 1$ をみたす正の数で、不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

をみたすとする。このとき $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。（京大）

第１０回　数列

☆等差数列の一般項　$a_n = a + (n-1)d$

☆等差数列の和　$S_n = \frac{1}{2}n(a+l) = \frac{1}{2}\{2a+(n-1)d\}$　　$l = last$

☆等差中項　$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

☆調和数列　逆数が等差数列になる数列

☆和と一般項　$a_1 = S_1$（初項は特別扱い）、 $n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$

☆等比数列の一般項　$a_n = ar^{n-1}$

☆等比数列の和　$S_n = \frac{a(r^{\text{項数}}-1)}{r-1}$

☆等比中項　$\{a_{n+1}\}^2 = a_n \times a_{n+2}$

☆ $\sum$ の性質

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k = c\sum_{k=1}^{n}a_k$

☆数列の和

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1 = 1+1+1+\cdots+1 = n$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1} = a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

☆階差数列

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$\boxed{1}$ 第 10 項が 13 、第 13 項が 4 の等差数列 a_n がある。

(1) 数列の一般項 a_n を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(3) 和 S_n が最大となるときの n とそのときの最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ 第 3 項が 8 、第 6 項が 64 の等比数列 a_n がある。

(1) 数列の一般項 a_n を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(3) 和 $S_n \leqq 10000$ である最大の n を求めよ。

$\boxed{3}$　３数 α, β, $\alpha\beta$ $(\alpha < 0 < \beta)$ は適当に並べると等差数列になり、また適当に並べると等比数列にもなるという。 α, β を求めよ。

$\boxed{4}$　初項が１、公差が整数の等差数列 a_1, a_2, $\cdots$, a_n $(n \geqq 3)$ で $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 55$ となるものをすべて求めよ。

$\boxed{5}$ $x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ y \leqq -x+n$ （n は自然数）の領域に含まれる格子点の数を求めよ。

$\boxed{6}$ $x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ y \leqq -\frac{1}{3}x+n$ （n は自然数）の領域に含まれる格子点の数を求めよ。[47]

[47][類]$x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ y \leqq -\frac{2}{3}x+2n$ （n は自然数）の領域に含まれる格子点の数を求めよ。

$\boxed{7}$ 数列 a_n の初項から第 n 項までの和 S_n は、$S_n = n^3 + 3n^2 + 2n$ である。

(1) 数列の一般項 a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k a_k$ を求めよ。

$\boxed{8}$ 数列 $a_n = 3n - 1$ について

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ の和を求めよ。

(2) $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}$ の和を求めよ。

(3) $2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} + \cdots + 2^{a_n}$ の和を求めよ。

$\boxed{9}$ ある等比数列の初項から第 n 項までの和が 54 、初項から第 $2n$ 項までの和が 63 であるとき、この等比数列の初項から第 $3n$ 項までの和を求めよ。

$\boxed{10}$ 初項が 3 、公比が 2 の等比数列の第 n 項を a_n とする。このとき、$10^3 < a_n < 10^5$ を満たす n の値の範囲は $\boxed{ア} \leqq n \leqq \boxed{イ}$ である。ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。また、$n = \boxed{ア}$ から $n = \boxed{イ}$ までの項の積 $a_{\boxed{ア}} \cdots a_{\boxed{イ}}$ は $3^{\boxed{ウ}} \cdot 2^{\boxed{エ}}$ である。

$\boxed{11}$ 次の数列の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+4k+5)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2$

$\boxed{12}$ 自然数 1, 2, 3, $\cdots$, n の中から異なる２数 i, j を取る。作った積の総和を求めよ。

(1) $i \times j$ の総和を求めよ。

(2) $i^2 \times j$ の総和を求めよ。

$\boxed{13}$ $1 \cdot n$, $2(n-1)$, $3(n-2)$, $\cdots$, $(n-1) \cdot 2$, $n \cdot 1$ の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$\boxed{14}$ 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}$, $\dfrac{1}{2\cdot 3}$, $\dfrac{1}{3\cdot 4}$, $\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}$, $\dfrac{1}{3\cdot 5}$, $\dfrac{1}{5\cdot 7}$, $\cdots$

(3) $\dfrac{1}{1\cdot 3}$, $\dfrac{1}{2\cdot 4}$, $\dfrac{1}{3\cdot 5}$, $\cdots$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$, $\cdots$

(5) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$, $\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}$, $\cdots$

$\boxed{15}$ 次のように、正の奇数を順次に奇数個ずつの群に分ける。[48]

$$(1),\ (3,\ 5,\ 7),\ (9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17)$$

(1) 第 n 群の 1 番目の数字を n で表せ。

(2) 2015 は第何群の何番目か。

(3) 第 n 群の和を求めよ。

[48] [類] 次の群数列について、以下の問いに答えよ。

$$1\ |\ 4,\ 7\ |\ 10,\ 13,\ 16\ |\ \cdots$$

(1) 第 n 群の 1 番目の数字を n で表せ。

(2) 第 n 群の和を求めよ。

$\boxed{16}$ １つの平面上に、n 本の直線がある。そのどれもが平行ではなく、３本が同じ１点で交わることもないものとする。平面はこれら n 本の直線でいくつの部分に分けられるか。

$\boxed{17}$ １つの空間内に、n 個の平面がある。そのどれもが平行ではなく、３つの平面が同じ直線で交わることもないものとする。空間はこれら n 個の平面でいくつの部分に分けられるか。

第１１回　漸化式

1　☆復習　次の漸化式を解け。

(1) $a_1 = 2,\ \ a_n = 4a_{n-1} + 3$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(2) $a_1 = 1,\ \ 2a_{n+1} + a_n = 4$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(3) $a_1 = 1,\ \ a_n = a_{n-1} + 5$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(4) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = a_n + n$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(5) $a_1 = 1$,　$a_{n+1} = a_n + 2^n$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(6) $a_1 = \frac{1}{3}$,　$a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(7) $a_1 = 3$,　$a_n = 2a_{n-1} + 2^n$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(8) $a_1 = 2$,　$a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(9) $a_1 = 1$,　$a_{n+1} = -a_n + 2^n$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(10) $a_1 = 3$,　$na_n = (n+1)a_{n-1} - 2$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(11) $a_1 = 1$,　$a_n = 2a_{n-1} - n + 1$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(12) $a_1 = 1$,　$a_n = \sqrt[3]{2a_{n-1}}$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(13) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = 2{a_n}^2$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(14) $a_1 = 1,\ \ a_2 = 4,\ \ a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(15) $a_1 = 1,\ \ a_2 = 5,\ \ a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

(16) $a_1 = 1,\ \ b_1 = 2,\ \ a_{n+1} = 2a_n + b_n,\ \ b_{n+1} = a_n + 2b_n$ で定義される数列の一般項 a_n を n の式で表せ。

$\boxed{2}$ 正の実数からなる 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は、$n \geqq 3$ について

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \quad b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n-2}}$$

をみたすものとする。次の問いに答えよ。(大阪市立大)

(1) $\{a_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると、$\{c_n\}$ は等比数列になることを示し、その公比を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ について a_n を a_1, a_2, n を用いて表せ。

(3) $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ のとき、$n \geqq 3$ について $\log_2 b_n$ を n を用いて表せ。

$\boxed{3}$ 自然数の数列 a_n, b_n を、$(3+\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ により定めるとき、次の問いに答えよ。（三重大）

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。

(2) $c_n = a_n - b_n\sqrt{5}$ とするとき、数列 c_n の一般項を求めよ。

(3) 数列 a_n, b_n の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$　数列 a_n の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき $2a_n - S_n = 3^n$ なる関係が成り立つ。一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{5}$　等式 $a_1 = 1,\quad a_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \geqq 2)$ を満たす数列 a_n の一般項を求めよ。[49]

[49][類] 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す。この数列が $a_1 = 0,\quad a_2 = 1,\quad (n-1)^2 a_n = S_n \quad (n \geqq 1)$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。(京大)

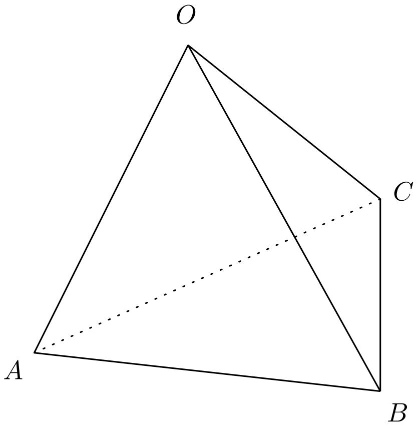
$\boxed{6}$ 数列 a_n が $a_1 = 1$， $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k$ で定められている。

(1) $n \geqq 2$ のとき a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_{k+1}}$ を求めよ。

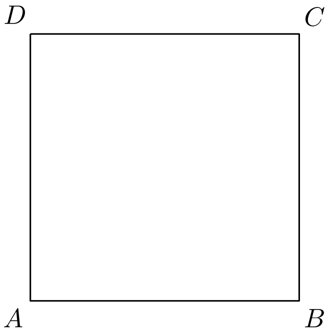
$\boxed{7}$ 平面上に正四面体が置いてある。平面と接している面の３辺のひとつを任意に選び、これを軸として正四面体をたおす。n 回の操作の後に、最初に平面と接していた面が再び平面と接する確率を求めよ。（東大）[50]



[50][類１] 三角形 ABC の頂点 A, B, C は反時計回りに並んでいるものとする。点 P はいずれかの頂点の位置にあり、１枚の硬貨を１回投げるごとに、表が出れば時計回りに隣の頂点へ、裏が出れば反時計回りに隣の頂点へ、移動するものとする。点 P は最初、頂点 A の位置にあったとする。硬貨を n 回投げたとき、点 P が頂点 A の位置に戻る確率を a_n で表す。a_n を求めよ。（大阪市立大）

[類２] 正四面体の各頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は、同じ頂点にとどまることなく、１秒ごとに他の３つの頂点に同じ確率で移動する。X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で表す。$P_1(0)=\frac{1}{4}$, $P_2(0)=\frac{1}{2}$, $P_3(0)=\frac{1}{8}$, $P_4(0)=\frac{1}{8}$ とするとき、$P_1(n)$ と $P_2(n)$ を求めよ。（東大）

$\boxed{8}$ 図のような正方形の４頂点 A, B, C, D を次の規則で移動する動点 Q がある。サイコロを振って１の目が出れば反時計回りに隣の頂点に移動し、１以外の目が出れば時計回りに隣の頂点に移動する。Q は最初 A にあるものとし、n 回移動した後の位置を Q_n とする。$Q_{2n} = A$ である確率を a_n とおく。（阪大）



(1) a_1 を求めよ。

(2) a_n を求めよ。

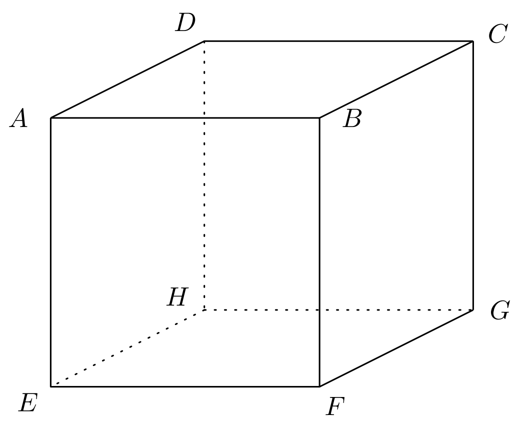
$\boxed{9}$ n を0以上の整数とする。立方体 $ABCD-EFGH$ の頂点を、以下のように移動する2つの動点 $P,\ \ Q$ を考える。時刻0には P は頂点 A に位置し、Q は頂点 C に位置している。時刻 n において、P と Q が異なる頂点に位置していれば、時刻 $n+1$ には、P は時刻 n に位置していた頂点から、それに隣接する3頂点のいずれかに等しい確率で移り、Q も時刻 n に位置していた頂点から、それに隣接する3頂点のいずれかに等しい確率で移る。一方、時刻 n において、P と Q が同じ頂点に位置していれば、時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない。(阪大)

(1) 時刻1において、P と Q が異なる頂点に位置するとき、P と Q はどの頂点にあるか。可能な組み合わせをすべて挙げよ。

(2) 時刻 n において、P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ。

(3) 時刻 n において、P と Q がともに上面 $ABCD$ の異なる頂点に位置するか、またはともに下面 $EFGH$ の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする。また、時刻 n において、P と Q のいずれか一方が上面 $ABCD$ 、他方が下面 $EFGH$ にある確率を q_n とする。p_{n+1} を、p_n と q_n を用いて表せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ。



$\boxed{10}$ 数列 a_n は漸化式

$$(n+3)a_{n+1}-(2n+4)a_n+(n+1)a_{n-1}=0 \quad (n \geqq 2)$$

を満たしている。次の問いに答えよ。（関西学院大）

(1) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおく。b_n を b_{n-1} で表せ。

(2) b_n を n と b_1 を用いて表せ。

(3) $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{1}{2}$ であるとき、a_n を求めよ。

(4) (3) で求めた a_n に対して、$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n$ を求めよ。

第１２回　数学的帰納法・二項定理

$\boxed{1}$　数学的帰納法を使わないで、次の等式を証明せよ。[51]

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$\boxed{2}$　数学的帰納法により、次の等式を証明せよ。[52]

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

[51] ヒント：$n^3-(n-1)^3$ または $(n+1)n(n-1)-n(n-1)(n-2)=3n(n-1)$
[52]「困った・困った・困ったときの帰納法」

$\boxed{3}$ k をある自然数とするとき、任意の自然数 n について

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

が成り立つ。このような k の値を推定し、その推定が正しいことを証明せよ。

$\boxed{4}$ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ （ド・モアブルの公式）を証明せよ。（慶応大）

$\boxed{5}$ 整数 $19^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^{4n-3}$ のすべてを割り切る素数を求めよ。[53]

[53]

(1) n が自然数のとき $3^{n+2} + 4^{2n+1}$ が 13 の倍数であることを証明せよ。

(2) n が自然数のとき $2^{2n+1} + 3 \cdot (-1)^n$ が 5 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{6}$ $n \geqq 2$ であるすべての自然数 n について不等式

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \geqq \frac{13}{8} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{7}$ $t=x+\frac{1}{x}$ とおくとき、$x^n+\frac{1}{x^n}$ が t の n 次式であることを証明せよ。

☆二項定理

$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \ldots + {}_nC_nb^n$ [54]

$\boxed{8}$ 次の式の展開式における与えられた項の係数を求めよ。

(1) $(2x-3y)^5$,x^3y^2

(2) $(x+\frac{2}{x})^7$,x

(3) $(x-y+2z)^6$,xy^3z^2

(4) $(x^2-\frac{2}{x}+1)^6$,定数項

[54]☆多項定理 $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ ただし $p+q+r=n$

$\boxed{9}$ k を実数とする。$(1+x+kx^2)^6$ を x について展開したとき、x^3 の係数と x^4 の係数を求めよ。また、x^4 の係数の値が最小になるとき、k の値を求めよ。

$\boxed{10}$ $(x+5)^{80}$ を展開したとき、x の何乗の係数が最大になるか。[55]

[55][類]$(x+3)^{50}$ を展開したとき、x の何乗の係数が最大になるか。

$\boxed{11}$ 正の整数の下２桁とは、 100 の位以上を無視した数をいう。例えば 2000, 12345 の下２桁はそれぞれ 0, 45 である。m が正の整数全体を動くとき、$5m^4$ の下２桁として現れる数をすべて求めよ。（東大）

$\boxed{12}$ 二項定理を用いて以下の等式を証明せよ。

(1) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_k + \cdots + {}_nC_n = 2^n$

(2) ${}_nC_0 + 2 \cdot {}_nC_1 + \cdots + 2^k \cdot {}_nC_k + \cdots + 2^n \cdot {}_nC_n = 3^n$

(3) ${}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot {}_nC_3 + \cdots + n \cdot {}_nC_n = 2^{n-1} \cdot n$

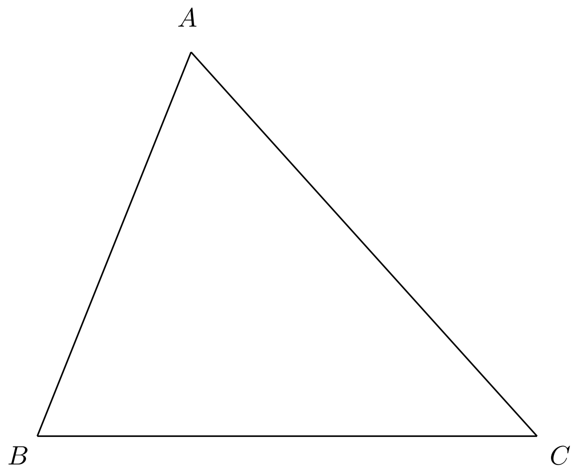
第１３回　ベクトル（１）

$\boxed{1}$　$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=1$ で $(\vec{a}+\vec{b})$ と $(2\vec{a}-3\vec{b})$ が垂直のとき $|3\vec{a}+2\vec{b}|$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$　座標平面上の２点 $A(8,\ 2),\ B(2,\ 8)$ と、直線 $y=kx$ 上の点 $P(x,\ y)$ がある。２つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ を満たすとき、k の値の範囲を求めよ。[56]

[56][類] ３組の対辺が互いに垂直であるような四面体 V がある。このとき、V の各辺の中点は、V の重心を中心とするある１つの球面上にあることを示せ。（京大）

$\boxed{3}$ $\triangle ABC$ において $2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ が与えられているとき点 P の位置を図示せよ。また $\triangle PBC$ ： $\triangle PCA$ ：$\triangle PAB$ の比を求めよ。[57]



[57]☆スペシャルテクニック $\frac{3\vec{b}+4\vec{c}}{9}=\frac{7}{9}\cdot\frac{3\vec{b}+4\vec{c}}{7}$

$\boxed{4}$ a を正の実数とする。三角形 ABC の内部の点 P が

$5\overrightarrow{\mathrm{PA}}+a\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}$

を満たしているとする。このとき

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\square^{ア}}{a+\square^{イ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\square^{ウ}}{a+\square^{エ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

が成り立つ。

直線 AP と辺 BC との交点 D が辺 BC を 1 ： 8 に内分するならば、$a=\square^{オ}$ となり、

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\square^{カ}}{\square^{キ}\square^{ク}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

となる。このとき、点 P は線分 AD を $\square^{ケ}$ ： $\square^{コ}$ に内分する。さらに、

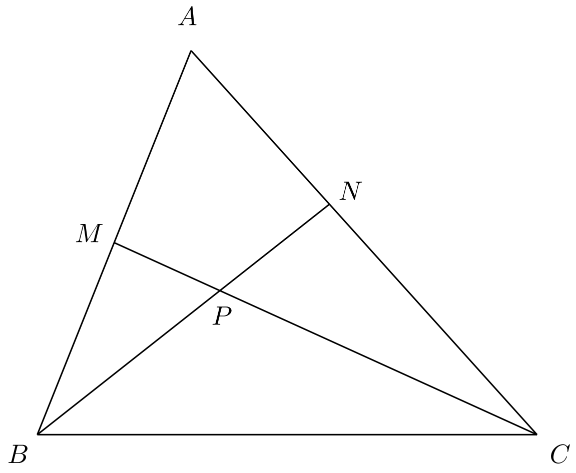
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2\sqrt{2},\ \ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{10},\ \ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{6}$

ならば

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\square^{サ}$
である。したがって

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\frac{\square^{シ}\square^{ス}\square^{セ}}{\square^{ソ}\square^{タ}}$
となる。(センター試験)

$\boxed{5}$ $\triangle ABC$ において AB の中点を M 、AC を 2 ： 3 に内分する点を N とする。さらに B と N 、C と M の交点を P とするとき



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

(2) AP の延長と BC の交点を Q とするとき $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を求めよ。

(3) チェバとメネラウスの定理を利用して上の結果を確認せよ。

$\boxed{6}$ $OA = \sqrt{13}$, $OB = \sqrt{5}$, $AB = 4$ である $\triangle OAB$ において、辺 OA, OB 上にそれぞれ点 D, E があり、線分 AE と線分 BD との交点 F は、線分 AE, BD をそれぞれ $7 : 1$, $5 : 3$ に内分している。

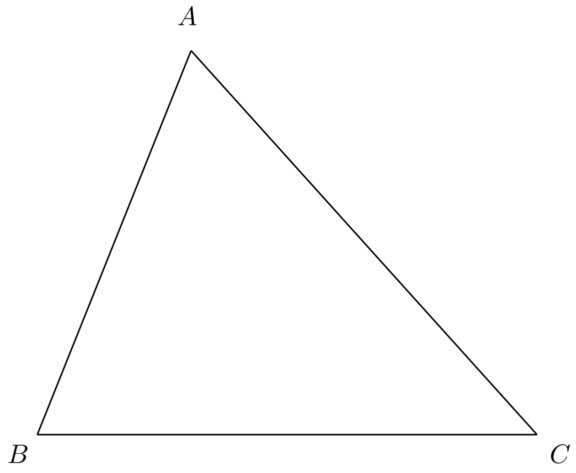
(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3) 点 O を中心とし点 F を通る円 C の半径を求めよ。

(4) 円 C の周上の動点 P に対して、内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ のとり得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{7}$ $AB=4,\ \ BC=6,\ \ CA=5$ である $\triangle ABC$ において内心を I 、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b},\ \ \vec{c}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|})$ となる k の値を求めよ。

(3) $\triangle IBC$ の面積を求めよ。

$\boxed{8}$ $\triangle ABC$ の外心を O 、外接円の半径 $R=1$ とする。$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}+6\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ であるとき、辺 AB の長さを求めよ。

$\boxed{9}$ $\triangle ABC$ において外心を O とすると $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ が成り立っているとき $\triangle ABC$ の形状を述べよ。

$\boxed{10}$ $\triangle ABC$ の垂心を H 、$AB=4,\ \ AC=5,\ \ \angle BAC=60^\circ$ 、AH の延長と BC の交点を Q 、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b},\ \ \vec{c}$ で表せ。

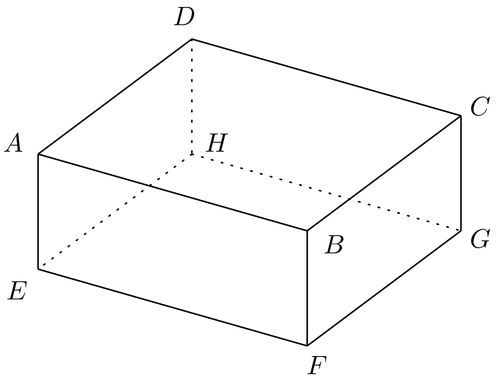
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b},\ \ \vec{c}$ で表せ。

$\boxed{11}$ なす角が 60° の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ がある。$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3,\ \ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$ である。いま $\angle AOB$ の二等分線上に点 P を取ったところ $PA=PB$ となった。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求めよ。[58]

[58][類] $\triangle OAB$ において、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。$|\vec{a}|=3,\ \ |\vec{b}|=5,\ \ \cos(\angle AOB)=\frac{3}{5}$ とする。このとき、$\angle AOB$ の 2 等分線と、B を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円との交点の、O を原点とする位置ベクトルを、$\vec{a},\ \ \vec{b}$ を用いてあらわせ。(京大)

$\boxed{12}$ $\triangle ABC$ において、外心 O 、重心 G 、垂心 H はこの順に同一直線上にあり、さらに OG ： $GH = 1$ ： 2 であることを示せ。

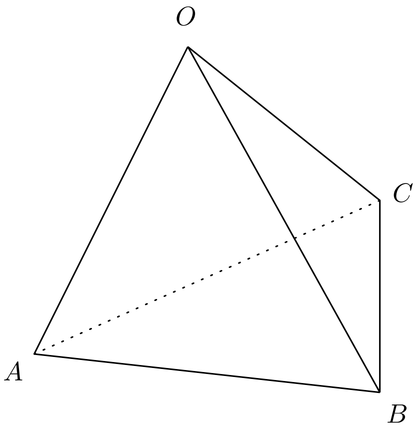
$\boxed{13}$ 平行六面体 $ABCD-EFGH$ において FG の中点を M とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とするとき



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を求めよ。

(2) AM と $\triangle BDE$ の交点を N とするとき $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ を求めよ。

$\boxed{14}$ 正四面体 $OABC$ において OA を 1 ： 2 に内分する点を P 、BC の中点を Q 、PQ を 1 ： 3 に内分する点を R とする。

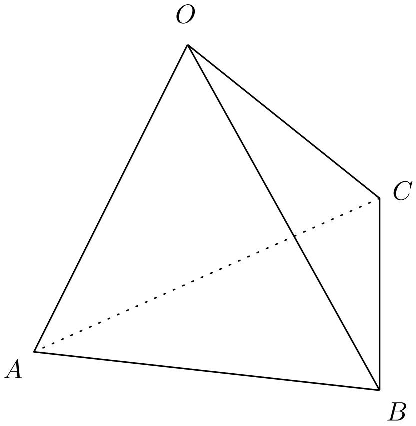


(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を求めよ。

(2) OR の延長と $\triangle ABC$ の交点を S とするとき $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を求めよ。

(3) CR の延長と $\triangle OAB$ の交点を T とするとき $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を求めよ。

$\boxed{15}$ 正四面体 $OABC$ において OA, OB, AC, BC の中点を K, L, M, N とするとき



(1) 4 点 K, L, M, N は同一平面 α 上にあることを証明せよ。

(2) OC 上に点 P 、AB 上に点 Q を任意でとるとき、PQ の中点 R は平面 α 上にあることを証明せよ。

$\boxed{16}$ 四面体 $ABCD$ において、辺 AB を $1 : 2$ に内分する点を P 、線分 PC を $1 : 2$ に内分する点を Q 、直線 AQ と BC の交点を R とする。BD 上に点 S をとり、三角形 BCD の重心を G とする。直線 AG と QS が交点 T を持つとき $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ を求めよ。ただし $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とする。

$\boxed{17}$ 四面体 $OABC$ において

$$\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2},\quad \angle BOC = \frac{\pi}{3},\quad OA = OB = 2,\quad OC = 1$$

とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え、$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき、$\vec{p}$ は実数 s, t を用いて

$$\vec{p} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表される。このとき、次の問いに答えよ。(広島大)

(1) 内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$, $\vec{p}\cdot\vec{b}$, $\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s, t を用いて表せ。

(2) 点 P が $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$ を満たすとき、s, t の値を求めよ。

(3) (2) の条件を満たす点 P について、直線 AP と直線 BC の交点を Q 、直線 BP と直線 AC の交点を R とする。$BQ \ : \ QC$ および $AR \ : \ RC$ を求めよ。

(4) (2) の条件を満たす点 P について、3つの四面体 $OABP$, $OBCP$, $OCAP$ の体積の比を求めよ。[59]

[59][類] $\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$, $OB = OC = 1$, $OA = 2$ である四面体 $OABC$ において、頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とするとき、垂線 OH の長さを求めよ。

$\boxed{18}$ 空間において、原点 O を中心とする半径 5 の球面上に、$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PR}}| = 4$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{QR}}| = 3$ を満たすように 3 点 P, Q, R をとる。また、線分 QR の中点を M とする。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{MP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を求めよ。

(4) 点 P と点 M を通る直線を l とし、原点 O から l に下ろした垂線の足を H とする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ で表せ。

$\boxed{19}$ 空間において、原点 O を中心とする球面に立方体 $ABCD-EFGH$ が内接している。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{e}$ とする。

(1) CF を 2 ： 1 に内分する点を I とするとき $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ の延長と球の交点を J とするとき $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ を求めよ。

$\boxed{20}$ 四面体 $OABC$ は次の２つの条件

(1) $OA\perp BC$, $OB\perp AC$, $OC\perp AB$

(2) ４つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき、この四面体は正四面体であることを示せ。（京大）

第１４回　ベクトル（２）

$\boxed{1}$ 空間内に定点 $A(1,\ 1,\ 1)$ がある。xy 平面上に原点を中心とする半径 1 の円があり、点 $P,\ Q$ はこの円周上を PQ が直径となるように動く。（一橋大）

(1) $\angle PAQ$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\triangle PAQ$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ 直線 $l : x-3=y-4=z$ と直線 $m : x-2=\dfrac{y+1}{-2}$, $z=0$ について、直線 l 上の点 S と直線 m 上の点 T の最短距離 ST とそのときの点 S, T の座標を求めよ。（京大改）

$\boxed{3}$ 空間に４点 $A(1,\ 0,\ 0)$　$B(0,\ 2,\ 0)$　$C(0,\ 0,\ 3)$　$D(4,\ 4,\ 4)$ がある。

(1) ３点 A, B, C を通る平面 α の式を求めよ。

(2) 平面 α と点 D の距離を求めよ。

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(4) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

$\boxed{4}$ 球面 S が xy 平面によって切り取られる図形の式が $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ で与えられており、かつこの球面 S が点 $(-2,\ 6,\ -2)$ を通るとき球面 S の式を求めよ。

$\boxed{5}$ 座標空間に 4 点 $A(2,\ 1,\ 0)$, $B(1,\ 0,\ 1)$, $C(0,\ 1,\ 2)$, $D(1,\ 3,\ 7)$ がある。3 点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点を E とするとき、点 E の座標を求めよ。（京大）

$\boxed{6}$ 空間に平面 α： $x+2y+z=5$ と 2 点 $A(0,\ 0,\ 2)$, $B(2,\ 1,\ 0)$ がある。

(1) α に関する A の対称点の座標を求めよ。

(2) 線分 AB は α と交わらないことを示せ。

(3) 点 P が α 上を動くとき、$AP+BP$ の最小値と点 P の座標を求めよ。

$\boxed{7}$ 空間内に４点 $A(0,\ 0,\ 1)$, $B(2,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 2,\ -1)$, $D(0,\ 2,\ 1)$ がある。(大阪市大)

(1) 点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろしたとき、点 H の座標を求めよ。

(2) 点 P が xy 平面上を動き、点 Q が直線 AB 上を動くとき、距離 DP, PQ の和 $DP+PQ$ が最小となる P, Q の座標を求めよ。

$\boxed{8}$ 空間に 4 点 $A(-2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 2,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 2)$, $D(2,\ -1,\ 0)$ がある。3 点 A, B, C を含む平面を T とする。（大阪市立大学・改）

(1) 点 D から平面 T に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

(2) 平面 T において、3 点 A, B, C を通る円 S の中心の座標と半径を求めよ。

(3) 点 P が円 S の周上を動くとき、線分 DP の長さが最小になる P の座標を求めよ。

$\boxed{9}$ xyz 空間において、直線 $x+y=4,\ \ z=1$ を含む平面 α と球 $x^2+y^2+z^2=4$ との交わりが半径が 1 の円であるとき α の方程式と交わりの円の中心の座標を求めよ。

$\boxed{10}$ 直線 $x=y=-z$ を含み、平面 $x+y+2z=0$ とのなす角が $\frac{\pi}{3}$ であるような平面の方程式を求めよ。[60]

[60][類] 空間内の 3 点を $A(0,\ \ 2,\ \ 0)$, $B(1,\ \ 3,\ \ 2)$, $C(3,\ \ 3,\ \ 4)$ とする。点 A を通り 2 つの線分 AB と AC に垂直な直線を l とする。このとき、$\angle APB=30^\circ$ となる直線 l 上の点 P の座標を求めよ。

$\boxed{11}$ 点 $(0,\ 1,\ 3)$ を通り、球 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ と接する直線の全体を考える。(阪大) [61]

(1) 直線と球の接点の全体は1つの平面上にある。この平面の方程式を求めよ。

(2) これらの直線が xy 平面と交わる点の全体は、xy 平面上の曲線となる。この曲線の方程式を求めよ。

[61][類]xyz 空間の3点 $A(5,\ 0,\ 0)$, $B(4,\ 1,\ 0)$, $C(5,\ 0,\ \sqrt{2})$ が定める平面を T 、T 上にあって点 A を中心として半径 $\sqrt{2}$ をもつ円を U とする。このとき、以下の問いに答えよ。(防衛医大)

(1) 点 P は円 U の周上にある。$\angle PAB=\theta\ \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とするとき、P の座標 $(u,\ v,\ r)$ を θ を用いて表せ。

(2) 2点 $D(10,\ 0,\ 0)$ 、P を通る直線が yz 平面と交わる点を $Q(0,\ Y,\ Z)$ とする。Y と Z を θ を用いて表せ。

(3) Q の軌跡が楕円になることを示せ。

第１５回　微分（１）

☆微分の定義

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

☆積の公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\{f(x)g(x)h(x)\}' = f(x)'g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

☆商の公式

$$\{\frac{f(x)}{g(x)}\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

☆合成関数の公式

$$\{f(x)^n\}' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$$

$\boxed{1}$　次の関数を微分せよ。

(1) $y = (x^3 + 2x^2)^5$

(2) $y = (x+3)^3(x^2+1)^2$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+ax+b}{(x+1)^2}$ が有限な極限値をもつように定数 a，b の値を定めよ。
またそのとき、この極限値を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ が $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+x-1$ であたえられているとき
$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(3+3h)-f(3-2h)}{h}$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数　$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ が $x = \alpha$ で極大、$x = \beta$ で極小となるとき

(1) $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ を a, b で表せ。

(2) $f(\alpha) + f(\beta)$ を a, b, c で表せ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ の極大点、極小点をそれぞれ A, B とすれば、線分 AB の中点はこの曲線上にあることを示せ。

$\boxed{5}$ 整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $4x-5$ で、$x+2$ で割ったときの余りが -4 である。$P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。[62]

$\boxed{6}$ 半径 1 の球に内接し、底面が正方形である正四角錘の体積が最大となるとき体積の最大値を求めよ。[63]

[62][類]x^n+ax+b が $(x-1)^2$ で割り切れるとき、a, b の値を求めよ。

[63][類] 半径 1 の球に含まれる直円錐でその側面積が最大になるものに対し、その高さ、底面の半径、および側面積を求めよ。

$\boxed{7}$ $f'(x)\{f'(x)-\frac{3}{2}x\}=f(x)+3(x+1)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。[64]

$\boxed{8}$ 関数 $f(x)=x^4+4px^2-p^2x+q$ が、ただ 1 つの極値を $x=1$ で持つための p, q の条件を求めよ。

[64][類] 関係 $f'(x)\{f'(x)-3x^2-x-\frac{2}{3}\}=9f(x)-2x^2-\frac{20}{3}x-\frac{19}{3}$ を満たす n 次の整式 $f(x)$ は存在するか。4 次式まで調べ、各次数につき存在するか、しないかを記し。存在する場合は $f(x)$ を求めよ。(上智大)

$\boxed{9}$ $x+y+z=0,\ \ x^2+y^2+z^2=6$ のとき $x^3+y^3+z^3$ の最大値、最小値を求めよ。

第１６回　微分（２）

$\boxed{1}$　関数 $y = x^2 + 3x + 2$ に接し、点 $(0,\ -2)$ を通る接線を求めよ。

$\boxed{2}$　関数 $y = (x-1)^2$ と関数 $y = -(x+1)^2$ の共通接線の方程式を求めよ。[65]

[65][類]a を正の実数とし、２つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える。（北大）
(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。
(2) ２つの放物線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$ に異なる 2 点で接する接線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ 点 $(1,\ -2)$ を通って、曲線 $y = x^3 - 3x + 3a - 2a^2$ に相異なる 3 本の接線を引くことができるとき、定数 a の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ 3 次方程式 $x^3 + x^2 - x + a = 0$ の実数解の個数を調べよ。[66]

[66][類]

(1) 4 次方程式 $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - a = 0$ の実数解の個数を調べよ。

(2) 3 次関数 $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x$ と $y = -x + a$ の実数解の個数を調べよ。

(3) 3 次方程式 $x^3 + 3px - p = 0$ の実数解の個数を調べよ。

$\boxed{6}$ 曲線 $y = x^3 - x$ について、点 $(-1,\ a)$ からこの曲線に引くことができる接線の数を調べよ。ただし、a は実数の定数とする。[67]

$\boxed{7}$ a を実数とする。2 つの曲線 $y = x^3 - x$ と $y = x^2 + a$ の両方に接する直線の個数を求めよ。

[67][類] 放物線 $y = x^2$ の法線で点 $(a,\ 2)$ を通るものが 3 本存在するための a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{8}$ k は整数であり、三次方程式 $x^3 - 13x + k = 0$ は３つの異なる整数解をもつ。k とこれらの整数解をすべて求めよ。（一橋大）[68]

$\boxed{9}$ xy 平面上で、曲線 $y = -x^2 + 4$ と x 軸とで囲まれた図形（境界を含む）に含まれる最長の線分の長さを求めよ。

[68] [類] k は整数であり、三次方程式 $x^3 - 5x^2 + 2x - k = 0$ は３つの異なる整数解をもつ。k とこれらの整数解をすべて求めよ。

$\boxed{10}$ n を 3 以上の整数とする。関数 $f(x)=2x^{n+1}-4x^n+3$ について[69]

(1) $f(\frac{3}{2})$ の符号を調べよ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ の正の解、負の解の個数を求めよ。

[69][類]

(1) 3 以上の任意の整数 n に対して $2^n \geqq 2(n+1)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 3 以上の任意の奇数 n に対して、方程式 $x^n-nx+1=0$ には実数解が全部で 3 個あり、それらはすべて -2 より大きく 2 より小さいことを証明せよ。

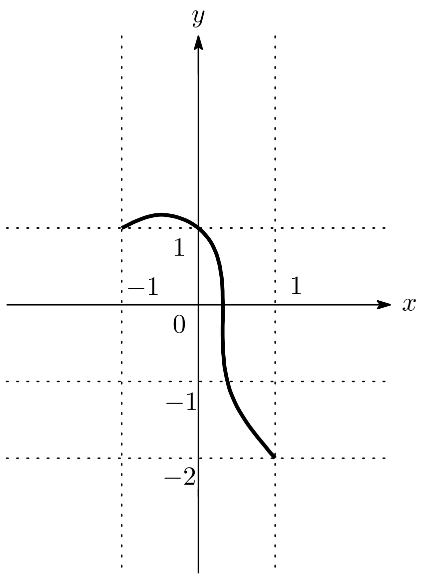
$\boxed{11}$ 曲線 $y = x^4 - 2x^2 + 1$ 上の各点で接線を引く。このとき、これらの接線が通る点全体の作る集合を求め図示せよ。

第１７回　積分（１）

$\boxed{1}$ 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が、

$$f(-1) = f(0) = 1,\quad f(1) = -2$$

を満たし、またそのグラフが下図のようになっているという。



このとき

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \geqq -1$$

を示せ。（京大）

$\boxed{2}$

(1) $f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a>0)$ とする。任意の１次の整式 $g(x)$ について、$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 0$ となるとき、a, b, c の関係を求めよ。

(2) このとき $f(x)$ が $\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\frac{2}{5}$ となるように、a, b, c の値を定めよ。

$\boxed{3}$ [70]

(1) 曲線 $y = x^2$ と曲線 $y = x + 1$ で囲まれた面積を求めよ。

(2) 曲線 $y = 2x^2$ と曲線 $y = -x + 6$ で囲まれた面積を求めよ。

$\boxed{4}$ xy 平面上で、連立不等式 $|x| \leqq 2$, $y \geqq x$, $y \leqq |\frac{3}{4}x^2 - 3| - 2$ を満たす領域の面積を求めよ。（京大）

[70] $\frac{1}{6}$ 公式 $\Longrightarrow \displaystyle\int_\alpha^\beta k(x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{|k|(\beta-\alpha)^3}{6}$

$\boxed{5}$ 曲線 $y = x^3 - 2x$ について、点 $(0,\ 2)$ を通り、この曲線に接する直線とこの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{6}$ a を $2 < a < 4$ の定数とする。$\displaystyle\int_0^4 |x-a|dx = \frac{17}{4}$ となるような a の値を求めよ。[71]

---

[71][類] 0 以上の実数 t に対し、$F(t) = \displaystyle\int_0^1 |x^2 - t^2|dx$ とする。次の問に答えよ。(大阪市立大)

(1) $F(t)$ を t を用いて表せ。

(2) $t \geqq 0$ において、関数 $F(t)$ が最小値をとるときの t の値とその最小値を求めよ。

$\boxed{7}$ $S=\displaystyle\int_{-2}^{1}|x^2+2ax|dx$ について、次の問いに答えよ。ただし、$a \geqq 0$ とする。S を最小にする a の値とそのときの最小値を求めよ。[72]

[72][類] a は $0<a<1$ を満たす定数であるとする。x の 3 次関数 $f(x)=4x^3-3x+a$ について

(1) 方程式 $f(x)=0$ は $0<x<1$ の範囲に 2 つの相異なる実数解をもつことを証明せよ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ の $0<x<1$ の範囲にある 2 つの実数解を α, β $(\alpha<\beta)$ とする。$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}|f'(x)|dx=a$ が成り立つような定数 a の値を求めよ。

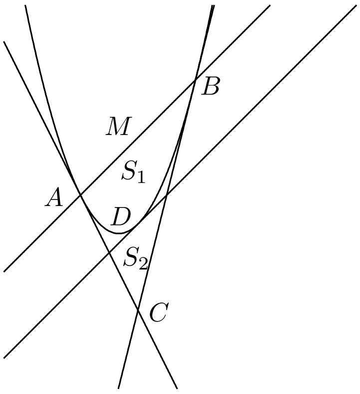
$\boxed{8}$ 曲線 $y=x^2$ と点 $(1,\ 2)$ を通る直線で囲まれた面積 $S(k)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{9}$ 放物線 $y=x^2+4$ に接する任意の接線と放物線 $y=x^2$ で囲まれる面積が一定値を取ることを証明せよ。またその面積の値を求めよ。

$\boxed{10}$ 直線 $y = mx + k$ が放物線 $y = x^2$ とで囲む部分の面積が一定値 36 であるとき、この直線は常にある放物線に接する。この放物線を求めよ。[73]

[73][類] 放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって、この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき、PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。(京大)

$\boxed{11}$ 曲線 $y=x^2$ において、点 $A(a,\ a^2)$ 、点 $B(b,\ b^2)$ $(a<b)$ における接線 $l_A,\ l_B$ の交点を C 、AB の中点を M とする。また $y=x^2$ の接線のうちで直線 AB と同じ傾きを持つ接線を l_D 、接点を D とする。 曲線 $y=x^2$ と直線 AB で囲まれた面積を S_1 、曲線 $y=x^2$ と接線 $l_A,\ l_B$ で囲まれた面積を S_2 とする。(頻出問題)[74]



(1) $C,\ D,\ M$ の座標を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2) $MD\ :\ DC$ の比を求めよ。

(3) $S_1\ :\ S_2$ の比を求めよ。

[74][類] 放物線 $C\ :\ y=x^2$ 上の点 $A_1(a_1,\ a_1^2),\ A_2(a_2,\ a_2^2),\ A_3(a_3,\ a_3^2),\ \cdots$ を、$A_{k+2}\ (k\geqq 1)$ における C の接線が直線 A_kA_{k+1} に平行であるようにとる。ただし、$a_1<a_2$ とする。三角形 $A_kA_{k+1}A_{K+2}$ の面積を T_k とし、直線 A_1A_2 と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき次の問に答えよ。(阪大)

(1) $\frac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k$ を S を用いて表せ。

$\boxed{12}$ 放物線 C ： $y=x^2$ 上の点 $P(a,\ a^2)$ における接線を l_1 、点 P と異なる放物線上の点 Q における接線 l_2 が l_1 と直交するとする。ただし、$a>0$ とする。（立命館大・改）

(1) l_1 の式を求めよ。

(2) l_2 の式を求めよ。

(3) 直線 PQ と放物線 C とで囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(5) 直線 $l_1,\ l_2$ および放物線 C とで囲まれた部分の面積 $T(a)$ を求めよ。

$\boxed{13}$ 放物線 $C\ :\ y=x^2+ax+b$ 上の原点以外の点 P_1, P_2 における C の接線をそれぞれ l_1, l_2 とし、l_1 と l_2 は原点で直交している。このとき C, l_1, l_2 で囲まれた部分の面積が最小になるような a, b の値と面積の最小値を求めよ。

第１８回　積分（２）

☆３次関数の性質

$\boxed{1}$ (1) ３次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ の変曲点の座標を求めよ。

(2) ３次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ の変曲点が原点に一致するように平行移動すると適当な実数 $A,\ B$ を用いて $y = Ax^3 + Bx$ と表せることを示せ。

(3) 3次関数 $y = Ax^3 + Bx$ は原点対称であることを示せ。

(4) 3次関数 $y = Ax^3 + Bx$ 上の任意の点 P における接線 l と3次関数 $y = Ax^3 + Bx$ との点 P 以外の交点を点 Q とする。P の x 座標を α 、Q の x 座標を β とするとき $|\alpha|$ ： $|\beta|$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 曲線 C_1 ： $y = x^3 - x$ 上の定点 $A(a,\ \ a^3 - a)$ における C_1 の接線を l とする。ただし、$a \neq 0$ とする。

(1) C_1 と l の共有点で点 A と異なる点の x 座標を求めよ。

(2) C_1 と l で囲まれた図形の面積 S_1 を求めよ。

(3) l が曲線 C_2 ： $y = x^3 - x + c \ \ (c \neq 0)$ に C_2 上の点 B で接するとき、点 B の x 座標と c の値を求めよ。

(4) C_2 と l の共有点で点 B と異なる点 C の x 座標を求めよ。

(5) C_2 と l で囲まれた図形の面積 S_2 を求めよ。

$\boxed{3}$ 曲線 C ： $y=x^3-x$ 上の点 P における接線が l 、P の x 座標 a は正である。

(1) l が C と再び交わる点を Q 、y 軸と交わる点を R とする。線分 PR の長さを L_1 、線分 RQ の長さを L_2 とするとき、比 L_1 ： L_2 を求めよ。

(2) C と l で囲まれた図形において、y 軸の右側にある部分の面積を S_1 、y 軸の左側にある部分の面積を S_2 とする。比 S_1 ： S_2 を求めよ。

$\boxed{4}$ xy 平面上で、曲線 $C\ :\ y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 上の点 P における接線 l が、P と異なる点 Q で C と交わるとする。l と C で囲まれた部分の面積と、Q における接線 m と C で囲まれた部分の面積の比を求め、これが一定であることを示せ。（東大）[75]

[75] [類] $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく。関数 $y = f(x)$ のグラフが y 軸と平行なある直線に関して対称であるとする。

(1) a, b, c, d が満たす関係式を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ は２つの２次関数の合成関数になっていることを示せ。

$\boxed{5}$ すべての実数に対して定義された関数 $f(x)$ が、任意の x, y に対して $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$ なる関係を満足し、$x = 0$ における $f(x)$ の微分係数が a であるとする。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。

(2) $f'(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{6}$ 関数 $f_n(x) = x^{n+1} - (n+1)x + n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ について、次の問いに答えよ。(佐賀大)

(1) $f_n(x)$ は、すべての自然数 n に対して、$(x-1)^2$ で割り切れることを示せ。

(2) 2 曲線 $y = f_1(x),\ \ y = f_2(x)$ のグラフを描け。

(3) 2 曲線 $y = f_{2n-1}(x)$ と $y = f_{2n}(x)$ とによって囲まれる部分の面積 S_n を n で表せ。

$\boxed{7}$ 整式の列 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\cdots$ が、関係 $f_1(x) = x^2 + x - 2$, $x^2 f_{n+1}(x) = 2x^3 + x^4 + \int_0^x t f_n(t)dt$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義されている。(新潟大)

(1) $f_n(x)$ は x の 2 次式であることを証明せよ。

(2) $f_n(x)$ を求めよ。

$\boxed{8}$ ４点 $O(0,\quad 0)$, $A(1,\quad 0)$, $B(1,\quad 1)$, $C(0,\quad 1)$ を頂点とする正方形が、放物線 $y = 1 + 2kx - 3k^2x^2$ によって面積の等しい２つの部分に分けられている。このとき、k の値を求めよ。（北大）

$\boxed{9}$

- $P_1(x)$ は1次式であって、任意の定数 C に対して
$$\int_{-1}^{1} P_1(x)Cdx = 0$$
- $P_2(x)$ は2次式であって、1次以下の任意の整式 $Q(x)$ に対して
$$\int_{-1}^{1} P_2(x)Q(x)dx = 0$$
- $P_3(x)$ は3次式であって、2次以下の任意の整式 $R(x)$ に対して
$$\int_{-1}^{1} P_3(x)R(x)dx = 0$$

このとき、$P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ を求めよ。ただし $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ の最高次の係数は1とする。(同志社大)

☆定積分で表された関数

$\boxed{10}$ $\displaystyle\int_{\text{定数}}^{\text{定数}} f(x)dx$ 型 $\ldots$ $\displaystyle\int_{\text{定数}}^{\text{定数}} f(x)dx = A$ とおく。

(1) $f(x) = x + 1 + \displaystyle\int_0^2 g(t)dt$, $g(x) = 2x - 3 + \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) = 3x + \displaystyle\int_0^1 (x+t)f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{11}$ $\displaystyle\int_{\text{定数}}^{\text{変数}} f(t)dt$ 型 $\cdots$ $f(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ を利用する。$\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$ も忘れずに。

(1) $f(0) = 1$, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = xf(x) + x^2 + x^3$ を満足する多項式 $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x g(t)dt$, $g(x) = x(x-1) + \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

(3) x の関数 $f(x)$, $g(x)$ が次の条件を満たしている。

- $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = xg(x) + ax + 2$ （a は実数）
- $\displaystyle g(x) = x^2 - 2x\int_0^1 f(t)dt + 1$

このとき、定数 a の値と関数 $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

$\boxed{12}$ $\displaystyle\int_{\text{変数}}^{\text{変数}} f(x)dx$ 型 $\cdots$ そのまま積分計算を実行する。

(1) $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{x+1} (t^3 - 3t^2 + 2t)dt$ の極値を求めよ。

(2) 関数 $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{x+a} (t^4 - t^2 - 1)dt$ がある。ただし、a は正の定数である。

i. $a = 2$ のとき、$f(x)$ の最小値を求めよ。

ii. $f(x)$ が最小値をとるときの x を a の式で表せ。

$\boxed{13}$ $f(x) = x^3 + x^2 + \int_{-1}^{1} (x-t)^2 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。（島根大）[76]

[76][類] 整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y)dy + \int_0^1 (x+y)^2 f(y)dy = x^2 + C$$

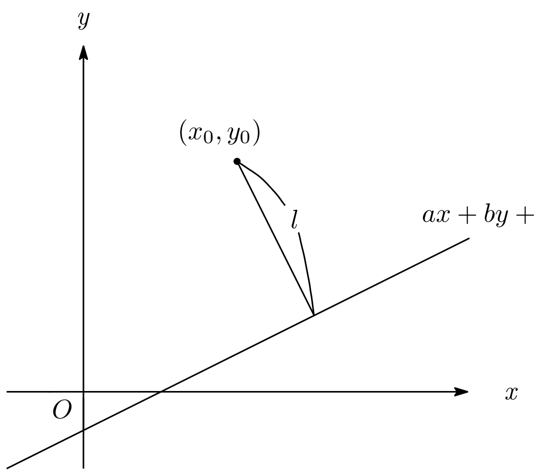
をみたすとき、この $f(x)$ と C を求めよ。（京大）

第１９回　円と直線

☆復習

♠ 点と直線の距離

点 $(x_0,\ y_0)$ から直線 $ax+by+c=0$ に下ろした垂線の長さ $h=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



♠ 円 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 上の点 $(s,\ t)$ における接線は $(s-p)(x-p)+(t-q)(y-q)=r^2$ で与えられる。

$\boxed{1}$ 次の円上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2+y^2=25$　$(-3,\ 4)$

(2) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$　$(4,\ 6)$

(3) $x^2+y^2-4x-2y-5=0$　$(5,\ 2)$

♠円 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 上にない点 $(s,\ t)$ を代入した直線 $(s-p)(x-p)+(t-q)(y-q)=r^2$ は、点 $(s,\ t)$ から円に引いた接線の接点を通る直線が与えられる。

$\boxed{2}$ 次の点を通る、与えられた円の接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2+y^2=4$ 　$(4,\ 2)$

(2) $x^2+y^2=5$ 　$(1,\ 3)$

♠ 円１：$S_1=0$ 、円２：$S_2=0$ とすると、$a\times S_1+b\times S_2=0$ は２円の交点を通るすべての円を表す。
また通常は $S_1+k\times S_2=0$ を使うが、これは $S_2=0$ を除くすべての円であることに注意して使うこと。

$\boxed{3}$ ２つの円 $x^2+y^2-2x=0$ と $x^2+y^2-4y-4=0$ について

(1) 交線を求めよ。

(2) 交点を求めよ。

(3) 交点を通り、点 (1, 0) を通る円の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ 円 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ と直線 $7x-y+2=0$ の交点を通り、点 $(-1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$ ２つの円 $x^2+y^2=2,\ (x-1)^2+(y+1)^2=1$ の２つの交点を通る円が直線 $y=x$ と接するとき、その円の中心と半径を求めよ。（早稲田大）[77]

[77][類]xy 平面上の２点 $A(-1,\ 4),\ B(2,\ 5)$ を通り、直線 $y=\frac{1}{2}x$ と共有点をもつ円を考える。

(1) この円の中心 P の軌跡を求めよ。

(2) この円の半径 r の最小値を求めよ。

$\boxed{6}$ 直線 $y = -x + 1$ が円 $x^2 + y^2 = 4$ によって切り取られる弦の中点の座標と弦の長さを求めよ。[78]

$\boxed{7}$ 直線 $y = 2x + 1$ が円 $x^2 + y^2 - 2(x + y) = 0$ によって切り取られる弦の中点の座標と弦の長さを求めよ。

[78] □点と直線の距離を使う $\Longrightarrow$ 計算が楽だが円にしか使えない。
□解と係数の関係を使う $\Longrightarrow$ 計算が大変になるが二次曲線全般に使える。

$\boxed{8}$ 　３点 $(-3,\ -2)$, $(0,\ 1)$, $(3,\ 0)$ を結ぶ三角形の面積を求めよ。（３通りの方法[79]）

$\boxed{9}$ 　３点 $A(0,\ 0)$, $B(14,\ 0)$, $C(9,\ 12)$ を結んでできる三角形について外心と内心を求めよ。

[79] □ AP を底辺とする方法
□面積の公式を使う方法
□ BC を底辺とする方法

$\boxed{10}$ 円 $(x-3)^2+(y-2)^2=26$ が直線 $y=\frac{3}{2}x+k$ を切り取ってできる弦の長さが $\sqrt{52}$ であるとき、k の値を求めよ。

$\boxed{11}$ ２つの円 $x^2+y^2=\frac{1}{16}$，$(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}$ の共通接線の方程式を求めよ。

$\boxed{12}$ 放物線 $y = x^2 + (2a-1)x - a^2 + 1,\ \ y = -x^2 - (a-2)x + a^2 + a$ が交点を２つもつための条件を求めよ。また、この２交点を通る直線は定点を通ることを示し、その座標を求めよ。

$\boxed{13}$ 座標平面の第１象限にある定点 $P(a,\ \ b)$ を通り、x 軸、y 軸と、それらの正の部分で交わる直線 l を引くとき、l と x 軸、y 軸で囲まれた部分の面積 S の最小値と、そのときの l の方程式を求めよ。

$\boxed{14}$ 放物線 $y = x^2 - 2x + 3$ について次の問いに答えよ。

(1) 直線 $x = 2$ に関して放物線と対称な図形の方程式を求めよ。

(2) 点 $(-1,\ 1)$ に関して放物線と対称な図形の方程式を求めよ。

(3) 直線 $y = 2x + 1$ に関して放物線と対称な図形の方程式を求めよ。

$\boxed{15}$ 座標平面上の直線 $l\ :\ ax+(1-a)y-1=0$ と円 $C\ :\ x^2+y^2-4x+2y-4=0$ について

(1) 直線 l と円 C は異なる 2 点で交わることを示せ。

(2) 円 C の中心から直線 l までの距離を求めよ。

(3) 直線 l と円 C の交点を $P,\ Q$ とするとき、弦 PQ の長さが 4 であるような a の値を求めよ。

$\boxed{16}$ 原点を O とする xy 平面上に 円 C ： $(x-2)^2+y^2=1$ と 直線 l ： $y=kx$ がある。円 C と直線 l が接するとき、接点を y 座標の大きい方から順に A, B とする。また２つの接点 A, B を通る直線を m とする。さらに円 C と直線 l が交点を２つ持つとき、それらを原点に近い方から P, Q 、直線 l と 直線 m の交点を R とする。

(1) C と l が交点を持つ k の範囲を求めよ。

(2) $OP\cdot OQ$ が一定であることを証明せよ。

(3) $OR(OP+OQ)$ が一定であることを証明せよ。

$\boxed{17}$ 2つの円を C_1 ： $x^2+y^2-2ax-2ay+8a-16=0$, C_2 ： $x^2+y^2=4$ とする。

(1) 円 C_1 は定数 a の値に関係なく、常に2つの定点を通ることを示し、その定点を求めよ。

(2) 円 C_1 と円 C_2 との交点の個数を調べよ。

第２０回　軌跡と領域

$\boxed{1}$　点 $(4,\ -2)$ と放物線 $y = x^2$ 上の点を結ぶ線分を $1 : 2$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。

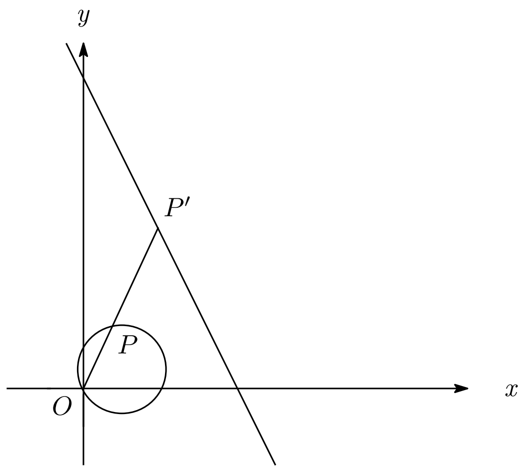
$\boxed{2}$　$3x - 2y + 2 = 0$ 及び $2x + 3y - 4 = 0$ から等距離にある点の軌跡を求めよ。

☆反転

中心 O を通る半径 r の定円があたえられている。O と異なる点 P を、半直線 OP 上の

$$OP \cdot OP' = r^2$$

なる点 P' に移す変換を反転といい、定円 O を反転円、点 O を反転の中心、 r を反転の半径という。反転によって円は直線に、直線は円に移される。



一般に２点 $P,\ P'$ の座標 $(a,\ b),\ (A,\ B)$ の間に

$$a = \frac{A}{A^2+B^2},\quad b = \frac{B}{A^2+B^2}$$

なる関係を持つので

$$a^2+b^2 = \frac{1}{A^2+B^2}$$

を利用して解く。

$\boxed{3}$ 2点 P, P' の座標 $(a,\ b)$, $(A,\ B)$ の間に

$$a = \frac{A}{A^2+B^2},\quad b = \frac{B}{A^2+B^2}$$

なる関係があるとき、次の問いに答えよ。（東北大）

(1) 原点 O からの距離 OP, OP' の間にどんな関係があるか。

(2) O, P, P' は一直線上にあることを示せ。

(3) 点 P' が直線 $2x+y=4$ 上を動けば、点 P はどんな図形を描くか。

$\boxed{4}$ 実数 x, y, X, Y の間に

$$X = \frac{x}{x^2+y^2},\quad Y = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

という関係がある。点 $P(x,\ y)$ が、不等式

$$(4x+3y-5)(4x-3y+5) > 0$$

で表される範囲を動くとき、点 $Q(X,\ Y)$ はどのような範囲を動くか（東大）[80]

[80][類]xy 平面において、原点Oを通る半径 r $(r>0)$ の円をCとし、その中心をAとする。Oを除くC上の点Pに対し、次の２つの条件 (a), (b) で定まる点Qを考える。（阪大）

(a) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の向きが同じ。

(b) $|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}| = 1$

(1) 点PがOを除くC上を動くとき、点Qは $\overrightarrow{OA}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2) (1) の直線を l とする。l がCと２点で交わるとき、r のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ xy 平面において直線 $l:\ x+ty=3t,\ \ m:\ tx-y=3$ を考える。

(1) t が実数全体を動くとき、l と m との交点の座標を t で表せ。

(2) t が実数全体を動くとき、l と m との交点の軌跡を求めよ。

$\boxed{6}$ 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $xy(x-y)(x^2+y^2-4)>0$

(2) $(|x+y|-1)(x^2+y^2-4)\leqq 0$

$\boxed{7}$ a を $a\geqq 0$ を満たす実数とする。 直線 $ax+(2-a)y=2$ 　の通りうる領域を図示せよ。(神戸大)

$\boxed{8}$ 直線 l : $y = ax + a^2 - 5$ 、放物線 C : $y = x^2$ について

(1) a がすべての実数値をとって変わる時、l のグラフが動きうる領域を図示せよ。

(2) l と C が共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。また、a がこの範囲で変わる時、l のグラフが動きうる領域を図示せよ。

$\boxed{9}$ xy 平面内の $-1 \leqq y \leqq 1$ で定められる領域 D と、中心が P で原点 O を通る円 C を考える。C が D に含まれるという条件のもとで、P が動きうる範囲を図示し、その面積を求めよ。（京大）

$\boxed{10}$ 円 $x^2 + y^2 = 4$ に内接し、直線 $y = 1$ に接する円の中心の軌跡をＣとする。

(1) Ｃの方程式を求めよ。

(2) Ｃに２点 $(\sqrt{3},\ 1)$, $(-\sqrt{3},\ 1)$ を加えて得られる曲線は平面のある部分を囲む。その面積を求めよ。

$\boxed{11}$ 座標平面上の３点 $A(1,\ 0)$, $B(-1,\ 0)$, $C(0,\ -1)$ に対し

$$\angle APC = \angle BPC$$

をみたす点 P の軌跡を求めよ。ただし $P \neq A,\ B,\ C$ とする。（東大・文系）

$\boxed{12}$ xy 平面において曲線 $y = x^2$ と正方形

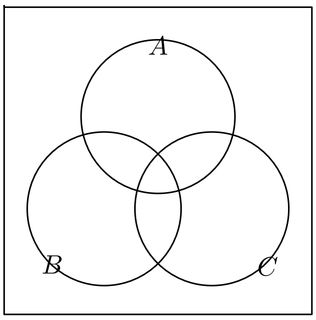
$$\{(x,\ y)\ :\ a \leqq x \leqq a+1,\ b \leqq y \leqq b+1\}$$

が共通点をもつとき、点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を求め、これを図示せよ。（阪大）

第２１回　集合と論証

☆集合

$\boxed{1}$ 180 人の人に持ち物検査をしたところ以下のようになった。
A と B の両方を持っている $\cdots$ 17 人
B と C の両方を持っている $\cdots$ 22 人
C と A の両方を持っている $\cdots$ 20 人
A と B の少なくとも一方を持っている $\cdots$ 98 人
B と C の少なくとも一方を持っている $\cdots$ 107 人
C と A の少なくとも一方を持っている $\cdots$ 116 人
A と B と C のいずれも持っていない $\cdots$ 42 人
このとき A, B, C をそれぞれ持っている人の数を求めよ。



$\boxed{2}$ $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ を満たす正の整数 a_k を要素とする集合 $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$ と、a_k^2 を要素とする集合 $B = \{a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ a_5^2\}$ に対し、$A \cap B = \{a_1,\ a_4\}$, $a_1 + a_4 = 5$ である。さらに、$A \cup B$ を作ったら、この集合に属する要素の和が 77 であった。このときの a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ。

☆命題　「真か偽かが明確に定まるもの。」

「命題」

$$\begin{tikzcd} \boxed{P \text{ ならば } Q \text{ である。}} \arrow[r, "\text{逆}"] \arrow[d, "\text{裏}"'] \arrow[dr, "\text{対偶}"] & \boxed{Q \text{ ならば } P \text{ である。}} \\ \boxed{P \text{ でないならば } Q \text{ でない。}} & \boxed{Q \text{ でないならば } P \text{ でない。}} \end{tikzcd}$$

命題 P の否定を $\bar{P}$ と書き

「または」 $\Longleftrightarrow$ 「かつ」

「$<$」 $\Longleftrightarrow$ 「$\geqq$」

「$=$」 $\Longleftrightarrow$ 「$\neq$」

「ある」 $\Longleftrightarrow$ 「すべて」

「奇数」 $\Longleftrightarrow$ 「偶数」

などを入れ替える。

☆対偶証明法　「対偶の真偽が必ず一致することを利用してある命題の証明が難しいとき、その命題の対偶を証明する方法。」

$\boxed{3}$　整数 a, b に関する次の命題の真偽を述べよ。

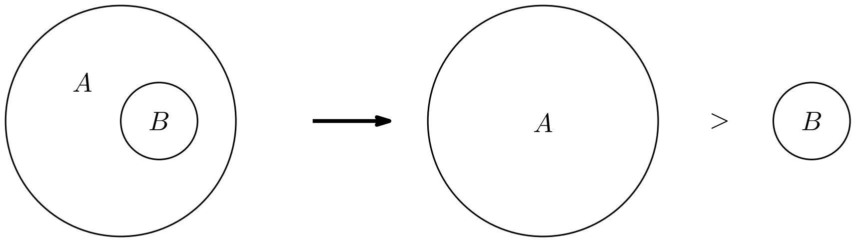
(1) $a^2 + b^2$ が 5 の倍数ならば、a, b はともに 5 の倍数である。

(2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、a, b はともに 3 の倍数である。

☆必要十分条件

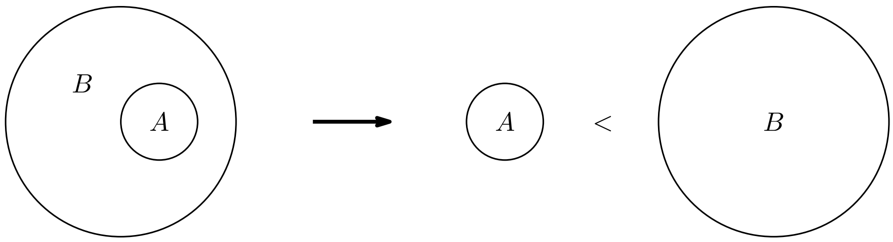
「a ならば b である。」という条件があった場合に

(1) $a > b$ のとき、必要条件である。



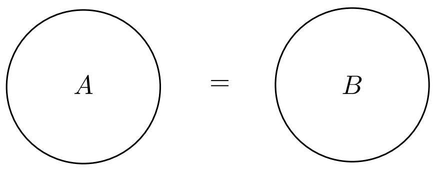
前が大きいとき、必要条件。

(2) $a < b$ のとき、十分条件である。



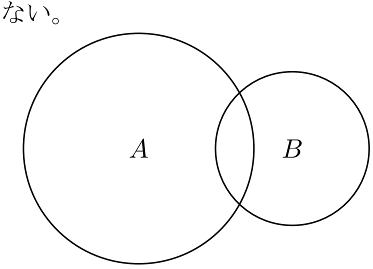
後ろが大きいとき、十分条件。

(3) $a = b$ のとき、必要十分条件である。



前と後ろが大きさが等しいとき、必要十分条件。

(4) a と b の条件が包含関係にないもしくは全く関係がない場合には、必要条件でも十分条件でもない。



包含関係にないとき、必要条件でも十分条件でもない。

$\boxed{4}$ 次の条件を決定せよ。

(1) $x=2$ は $x^2-5x+6=0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(2) $x^2-3x+2=0$ は $x^2-5x+6=0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(3) $x^3-6x^2+11x-6=0$ は $x^2-5x+6=0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(4) $xy=0$ は $x=y=0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(5) $x^2+y^2=0$ は $x=y=0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(6) $(x-y)(y-z)=0$ は $x=y=z$ であるための $\boxed{}$ 条件

(7) $x^2>y^2$ は $x>y$ であるための $\boxed{}$ 条件

(8) a, b がともに整数であることは ab が整数であるための $\boxed{}$ 条件

(9) $x>0$ かつ $y>0$ は $xy>0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(10) $|a+b|<|a|+|b|$ は $ab>0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(11) $x>0$ または $y>0$ は $xy>0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(12) $0 \leqq x \leqq 1$ かつ $0 \leqq y \leqq 1$ であることは $0 \leqq x$ かつ $0 \leqq y$ かつ $xy \leqq 1$ であるための $\boxed{}$ 条件

(13) $0 \leqq x \leqq 1$ または $0 \leqq y \leqq 1$ であることは $0 \leqq x$ かつ $0 \leqq y$ かつ $xy \leqq 1$ であるための $\boxed{}$ 条件

(14) $|x+y|<1$ であることは $|x|+|y|<1$ であるための $\boxed{}$ 条件

(15) $x^2+y^2<1$ であることは $|x|+|y|<1$ であるための $\boxed{}$ 条件

(16) $|x+y|<1$ かつ $|x-y|<1$ であることは $|x|+|y|<1$ であるための $\boxed{}$ 条件

(17) 二等辺三角形は正三角形であるための $\boxed{}$ 条件

(18) $\angle A=60^\circ$ は正三角形であるための $\boxed{}$ 条件

(19) 長方形は平行四辺形であるための $\boxed{}$ 条件

(20) 集合 A, B について $A \cup B=A$ は $A \cap B=B$ であるための $\boxed{}$ 条件

(21) 整数 n について、n^2 が 12 の倍数であることは、n が 12 の倍数であるための $\boxed{}$ 条件

(22) 三角形 T の内接円の中心と外接円の中心が一致することは、T が正三角形であるための $\boxed{}$ 条件

(23) 実数 a, b について $|a+b|=|a|+|b|$ は $ab \geqq 0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(24) 実数 a, b, c について $|a+b+c|=|a|+|b|+|c|$ は $ab+bc+ca \geqq 0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(25) ローマに住んでいることはイタリア人であるための $\boxed{}$ 条件

(26) 大学生であることは人間であるための $\boxed{}$ 条件（奈良県立大）

$\boxed{5}$ m, n を整数とする。x の整式 $A = x^3 + mx^2 + nx + 2m + n + 1$ を考える。(センター試験)

(1) x の整式 B を $B = x^2 - 2x - 1$ とする。A を B で割ると、商 Q と余り R はそれぞれ

$$Q = x + (m + \boxed{ア}),\quad R = (2m + n + \boxed{イ})x + (3m + n + \boxed{ウ})$$

である。また、$x = 1 + \sqrt{2}$ のとき、B の値は $\boxed{エ}$ であり、さらにこのとき、A の値が -1 であるならば、m, n は整数だから、$m = \boxed{オ}$, $n = \boxed{カ}$ である。

(2) x がどのような奇数であっても A の値が常に偶数になるための必要十分条件は $\boxed{キ}$ である。

i. m が奇数
ii. n が奇数
iii. $m - n$ が奇数
iv. m が偶数
v. n が偶数
vi. $m - n$ が偶数

$\boxed{6}$ $a,\ b$ を実数とし、x の整式

$$A = x^4 + (a^2 - a - 1)x^2 + (-a^2 + b)x + b^3,\quad B = x^2 - x - a$$

を考える。A を B で割った商を Q 、余りを R とすると

$$Q = x^2 + x + a\boxed{\text{ア}},\quad R = (a+b)x + a\boxed{\text{イ}} + b\boxed{\text{ウ}}$$

である。(センター試験)

(1) $R = x + 7$ のとき、$a = \boxed{\text{エ}}$ または $a = \boxed{\text{オ}}$ である。

(2) $a < -\frac{1}{2}$ は、すべての実数 x に対して $Q > 0$ となるための $\boxed{\text{カ}}$ 。

(3) $a + b = 0$ は、A が B で割り切れるための $\boxed{\text{キ}}$ 。

$\boxed{7}$ a, b を実数として、次の（ア）〜（エ）に下から当てはまるものを選べ。
$(|a+b|+|a-b|)^2 = 2(a^2+b^2+$（ア）$)$ であるから、$(|a+b|+|a-b|)^2 = 4a^2$ が成り立つための必要十分条件は（イ）である。（イ）でないときは $(|a+b|+|a-b|)^2 =$（ウ）となる。
また、$\frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|) = b$ が成り立つための必要十分条件は（エ）である。　（センター試験）

(1) a^2

(2) b^2

(3) $4a^2$

(4) $4b^2$

(5) ab

(6) $|ab|$

(7) $2ab$

(8) $2|ab|$

(9) a^2-b^2

(10) b^2-a^2

(11) $|a^2-b^2|$

(12) $a^2 \leqq b^2$

(13) $a^2 \geqq b^2$

(14) $a \leqq |b|$

(15) $|a| \leqq b$

(16) $a \geqq |b|$

(17) $|a| \geqq b$

8　自然数 n に関する条件 p, q, r, s を次のように定める。

p:　n は5で割ると1余る数である。

q:　n は10で割ると1余る数である。

r:　n は奇数である。

s:　n は2より大きい素数である。

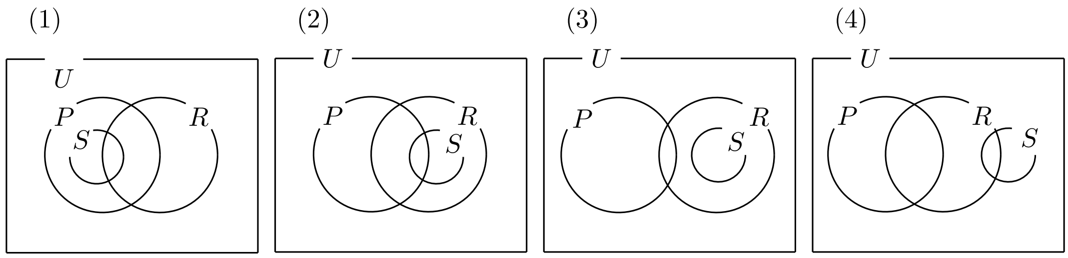
また、条件 r の否定を $\bar{r}$ 、条件 s の否定を $\bar{s}$ で表す。このとき

「p かつ r」は q であるための $\boxed{ア}$ 。

　$\bar{r}$ は $\bar{s}$ であるための $\boxed{イ}$ 。

「p かつ s」は「q かつ s」であるための $\boxed{ウ}$ 。

自然数全体の集合を全体集合 U とし、条件 p を満たす自然数全体の集合を P 、条件 r を満たす自然数全体の集合を R 、条件 s を満たす自然数全体の集合を S とすると、P, R, S の関係を表す図は $\boxed{エ}$ である。(センター試験)



$\boxed{9}$ 実数 a, b に関する条件 p, q を次のように定める。(センター試験)

p : $(a+b)^2 + (a-2b)^2 < 5$

q : $|a+b| < 1$ または $|a-2b| < 2$

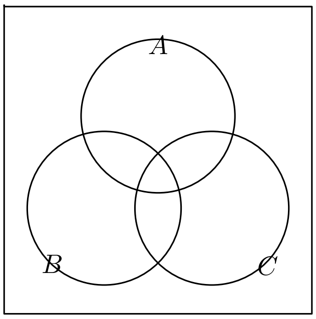
(1) 命題「$q \Longrightarrow p$」に対する反例を次から選べ。

(1)$a=0, b=0$ (2)$a=1, b=0$ (3)$a=0, b=1$ (4)$a=1, b=1$

(2) 命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶を述べよ。

(3) p は q であるための $\boxed{}$。

$\boxed{10}$ ある町で無作為に選ばれた 100 世帯について、家庭電気器具 A, B, C 3社の販売状況を調査したところ、次の結果が得られた。A 社の商品を購入している世帯数 69 、B 社の商品を購入している世帯数 46 、B, C 2社の商品を購入している世帯数 21 、A, C 2社の少なくとも一方の商品を購入している世帯数 88 、B, C 2社の少なくとも一方の商品を購入している世帯数 50 、A, B, C 3社のいずれか1社の商品のみを購入している世帯数 61 。このとき、次の世帯数を求めよ。（可能な場合をすべて書け。）



(1) A 社の商品のみを購入している世帯数。

(2) B 社の商品のみを購入している世帯数。

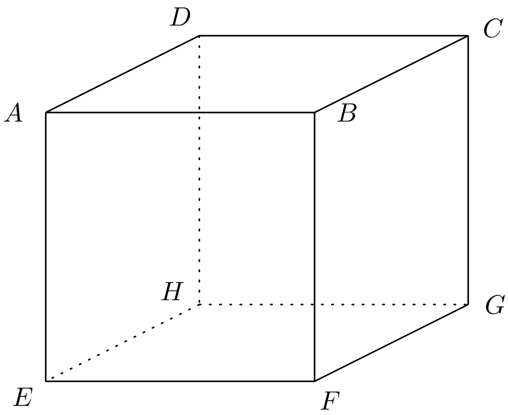
(3) C 社の商品のみを購入している世帯数。

(4) A, B, C 3社の商品を購入している世帯数。

(5) A, B, C 3社のいずれの商品も購入していない世帯数。

第２２回　確率

$\boxed{1}$ 立方体の各面に、隣り合った面の色は異なるように、色を塗りたい。ただし、立方体を回転させて一致する塗り方は同じと見なす。

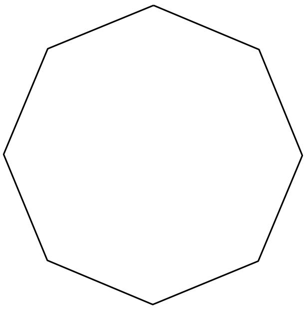


(1) 異なる６色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。

(2) 異なる５色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。

(3) 異なる４色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。

$\boxed{2}$ 正八角形の３つの頂点でできる三角形を考える。



(1) 直角三角形はいくつあるか。

(2) 二等辺三角形はいくつあるか。

(3) 元の正八角形と二辺を共有するものはいくつあるか。

(4) 元の正八角形と一辺を共有するものはいくつあるか。

(5) 元の正八角形と辺を共有しないものはいくつあるか。

$\boxed{3}$ 12 人を次のように分ける分け方は何通りあるか。[81]

(1) 5 人と 4 人と 3 人

(2) 6 人と 3 人と 3 人

(3) 4 人と 4 人と 4 人

(4) 3 人と 3 人と 3 人と 3 人

(5) 4 人と 4 人と 2 人と 2 人

[81] [類] 男子 6 人、女子 6 人を男子 2 人、女子 2 人の三組に分ける分け方は何通りあるか。

$\boxed{4}$　5 人を次の条件下で２つの部屋に分けるとき、それぞれの場合の数を求めよ。

(1) A と B の二つの部屋のどちらかに分けるとき（０人の部屋が有っても良い。）

(2) A と B の二つの部屋に分けるとき

(3) 区別のつかない二つの部屋に分けるとき

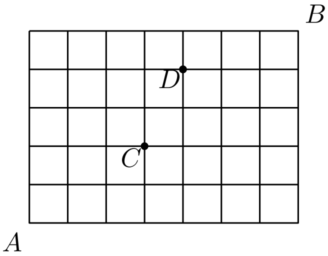
$\boxed{5}$　5 人を次の条件下で３つの部屋に分けるとき、それぞれの場合の数を求めよ。

(1) A と B と C の三つの部屋のいずれかに分けるとき（０人の部屋が有っても良い。）

(2) A と B と C の三つの部屋に分けるとき

(3) 区別のつかない三つの部屋に分けるとき

$\boxed{6}$ 次の条件で A から B に行く最短経路を求めよ。[82]



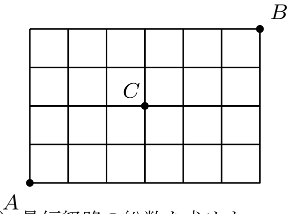
(1) 最短経路の総数を求めよ。

(2) C を通る最短経路の数を求めよ。

(3) C と D を通る最短経路の数を求めよ。

(4) C と D をどちらも通らない最短経路の数を求めよ。

[82][類] 次のような道路の図において、最も小さい正方形の1辺の長さは 1 m であるとする。次の条件で A から B に行く最短経路を求めよ。(高知大)



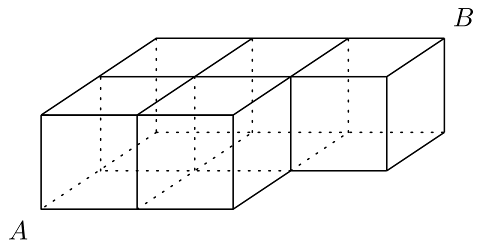
(1) 最短経路の総数を求めよ。

(2) C を通らない最短経路の数を求めよ。

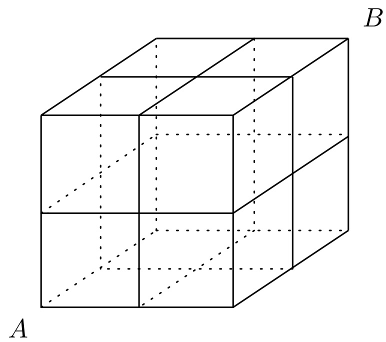
(3) 経路に含まれる最も長い直線路の長さが 5 m 以上である最短経路の数を求めよ。

(4) 経路に含まれる最も長い直線路の長さが 4 m 以上である最短経路の数を求めよ。

$\boxed{7}$ A から B に行く最短経路を求めよ。



$\boxed{8}$ A から B に行く最短経路の場合の数を求めよ。ただし経路は表面にしかないものとする。



$\boxed{9}$ りんご、なし、みかんを合わせて 6 個買う。

(1) りんご、なし、みかんを最低 1 個は買うとき、組み合わせは何通りあるか。

○ ○ ○ ○ ○ ○

(2) りんご、なし、みかんのうち 0 個のものがあってもよいとき、組み合わせは何通りあるか。

○ ○ ○ ○ ○ ○

$\boxed{10}$ $x+y+z=10$ を満たす整数 x, y, z について[83]

(1) 整数 x, y, z が自然数であるとき、組み合わせは何通りあるか。

(2) 整数 x, y, z が負でない整数であるとき、組み合わせは何通りあるか。

[83][類]$x+y+2z=n$ (n は 5 以上の奇数) を満たす自然数 x, y, z の組み合わせは何通りあるか。

$\boxed{11}$ 赤球３個、青球４個、黄球５個が入っている袋から同時に４個の球を取り出すとき、次の確率を求めよ。[84]

(1) 取り出した球がどの色の球も含む確率を求めよ。

(2) 取り出した球の色が２色になっている確率を求めよ。

[84] [類] 自然数 1, 2, 3, $\cdots$, 100 の中から相異なる３つの数を取り出したとき、その３つの数の和が３で割り切れる確率を求めよ。

$\boxed{12}$ A、B、C、Dの４人がじゃんけんを１回だけするとき、２人が勝つ確率を求めよ。

$\boxed{13}$ A、B、C、Dの４人がじゃんけんを１回だけするとき、あいこになる確率を求めよ。

$\boxed{14}$ n 人がじゃんけんを１回だけするとき、あいこになる確率を求めよ。

$\boxed{15}$ 1つのさいころを n 回繰り返し投げるとき（京大）

(1) 出た目の最大値が５になる確率を求めよ。

(2) 出た目の最小値が２になる確率を求めよ。

(3) 出た目の最小値が２、出た目の最大値が５になる確率を求めよ。

$\boxed{16}$ 1から n までの自然数が重複なく書かれた n 枚のカードがある。この n 枚のカードから1枚カードを引き、書かれている数を記録し、カードをもどすという試行を k 回行う。記録された k 個の数の最大値を得点とする。以下の問いに答えよ。ただし、m は自然数とする。（大阪府立大）

(1) 得点が m 以上である確率 $p(m)$ を、m, n, k を用いて表せ。

(2) 得点が m である確率 $q(m)$ を、m, n, k を用いて表せ。

(3) k が2のとき、得点の期待値を n を用いて表せ。

$\boxed{17}$ サイコロを繰り返し n 回振って、出た目の数を掛け合わせた積を X とする。（京大・改）[85]

(1) X が 3 で割り切れる確率 P_n を求めよ。

(2) X が 4 で割り切れる確率 Q_n を求めよ。

(3) X が 6 で割り切れる確率 R_n を求めよ。

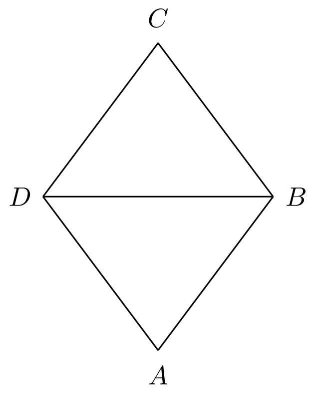
[85] [類] さいころを繰り返し投げて、n 回目に出た目の数を X_n とし、$a_n = X_1X_2\cdots X_n$ とする。このとき、各 n について、$a_n \leqq 9$ となる確率を求めよ。（熊本大）

$\boxed{18}$ ３人でじゃんけんをして、勝った者が残り、最後に勝ち残った１人が優勝するとする。

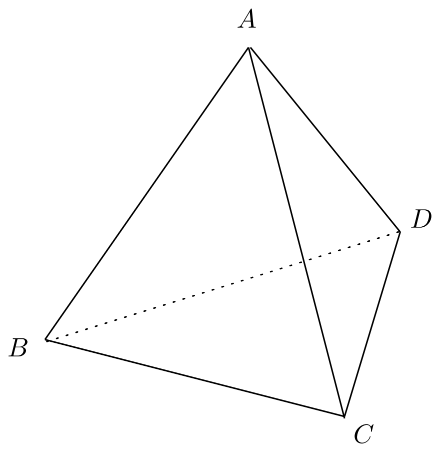
(1) 丁度３回目で優勝者が決まる確率を求めよ。

(2) 丁度 n 回目で優勝者が決まる確率を求めよ。

$\boxed{19}$ 菱形 $ABCD$ の各辺とその対角線 BD はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で電流を流すものとする。このとき頂点 A から C に電流が流れる確率を求めよ。



$\boxed{20}$ 四面体 $ABCD$ の各辺はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で電流を流すものとする。このとき頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。（東大・文系）[86]



[86] 類　四面体 $ABCD$ の各辺はそれぞれ確率 p で電流を流すものとする。このとき頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。（東大・理系）

$\boxed{21}$ 袋の中に、白玉が 15 個、黒玉が n 個入っている。この袋の中から、3 個の玉を取り出すとき、白玉 2 個、黒玉 1 個となる確率を P_n とする。

(1) P_n を求めよ。

(2) P_n が最大になる n の値と、そのときの P_n を求めよ。

$\boxed{22}$ 赤球が 1 個、白球が 2 個入った袋が n 袋ある。これらの袋からそれぞれ 1 個ずつ玉を取り出したとき、赤球の合計が奇数個になる確率を P_n とする。

(1) P_{n+1} を P_n で表せ。

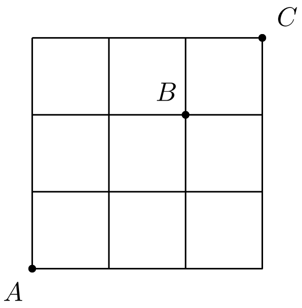
(2) P_n を求めよ。

$\boxed{23}$ 1から n までの番号のついた n 枚の札が袋に入っている。ただし、$n \geqq 3$ とする。この袋から3枚の札を取り出して、札の番号を大きさの順に並べるとき、等差数列になっている確率を求めよ。(京大) [87]

$\boxed{24}$ 白球と赤球の入った袋から2個の球を同時に取り出すゲームを考える。取り出した2球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し、そうでないときは「失敗」とし、取り出した2球に赤球を1個加えた3個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする。最初に白球が2個、赤球が1個袋に入っていたとき、$n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ。ただし、$n \geqq 2$ とする。(京大)

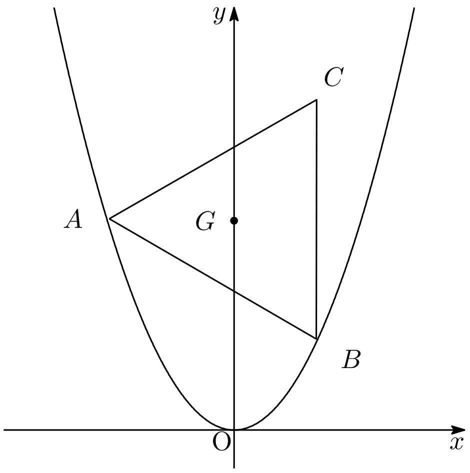
[87] n が奇数のときと偶数のときに分ける。

$\boxed{25}$ 図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し、さいころを繰り返し振り、次の規則にしたがって進むものとする。１の目が出たら右に２区画、２の目が出たら右に１区画、３の目が出たら上に１区画進み、その他の場合はそのまま動かない。ただし、右端で１または２の目が出たとき、あるいは上端で３の目が出たときは、動かない。また、右端の１区画手前で１の目が出たときは、右端まで進んで止まる。
n を８以上の自然数とする。A 地点から出発し、さいころを n 回振るとき、ちょうど６回目に、B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり、n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし、さいころのどの目が出るのも、同様に確からしいものとする。（東北大）



第２３回　放物線と図形

1　１辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正三角形 ABC の重心を G とする。図のように G を y 軸上におき、BC を y 軸に平行になるようにした。点 $A,\ B$ がともに放物線 $y = kx^2 \quad (k > 0)$ の上にあるとき、k の値と重心 G の座標を求めよ。



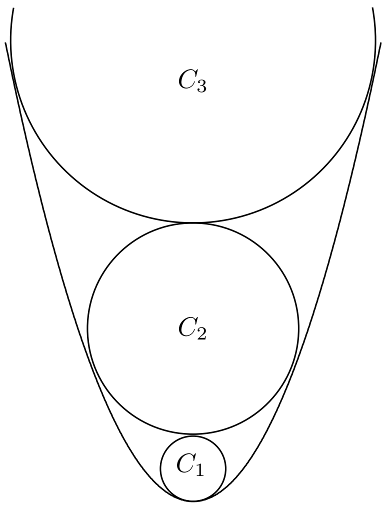
$\boxed{2}$ $a>0$ とし、xy 座標平面において、x 軸に平行な直線 $l : y=a$ および放物線 $U : y=x^2$ を考える。次の問いに答えよ。（一橋大）

(1) 点 $(0,\ s)$ を中心とする半径 r の円と放物線 U が、ただ一つの共有点を持つための $s,\ r$ についての条件を求めよ。

(2) 直線 l と放物線 U によって囲まれる領域（境界も含む）を D とする。D に含まれ、y 軸上に中心を持つ円のうちで、その半径 r が最大のものを求めよ。

$\boxed{3}$ 放物線 $y = -x^2 + 2$ と x 軸で囲まれる領域に含まれる円のうちで半径が最大のものを求めよ。

$\boxed{4}$ 座標平面上で不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D とする。D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち、最も半径の大きい円を C_1 とする。自然数 n について、円 C_n が定まったとき、C_n の上部で C_n に外接する円で、D 内にあり y 軸上に中心をもつもののうち、最も半径の大きい円を C_{n+1} とする。C_n の半径を a_n とし、$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。(阪大)

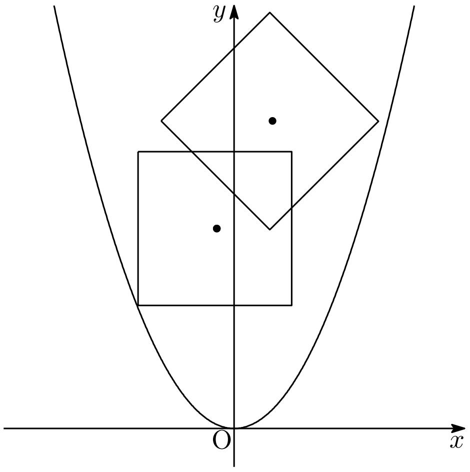


(1) a_1 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき a_n を b_{n-1} で表せ。

(3) a_n を n の式で表せ。

$\boxed{5}$ xy 平面上の $y \geqq x^2$ で表される領域を D とする。D に含まれる 1 辺の長さ l の正方形で、各辺が座標軸と平行または 45° の角をなすものをすべて考える。このとき、これらの正方形の中心の y 座標の最小値を t の関数として表し、そのグラフをかけ。（東大）[88]



[88][類]xy 平面上の不等式 $y \geqq x^2$ で表される領域を D とする。D に含まれる 1 辺の長さが t の正三角形で、1 辺が x 軸と平行となるものをすべて考える。このとき、これらの正三角形の重心の y 座標の最小値を t の関数として書き表せ。（横浜市大）

$\boxed{6}$ $a > 1$ を満たす定数 a に対し、座標が $(a,\ a)$ である点を A とする。関数 $y = \frac{1}{x}\ \ (x > 0)$ のグラフ上を動く点 $P(t,\ \frac{1}{t})$ をとり、$t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ を、長さ AP を用いて $f(t) = AP^2$ で定める。次の問いに答えよ。（大阪市大）

(1) $f(t)$ を t と a を用いて表せ。

(2) $f'(t) = 0$ となる $t\ \ (t > 0)$ の値を求めよ。

(3) AP が最小になるような点 P の座標と、AP の最小値を求めよ。

$\boxed{7}$ xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の3点 P, Q, R が次の条件をみたしている。$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり、点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。このとき a の値を求めよ。(東大)(難)[89]

[89][類] 放物線 $y=x^2$ 上の相異なる3点 P, Q, R は $\triangle PQR$ が正三角形になるように動いている。(阪大)(難)

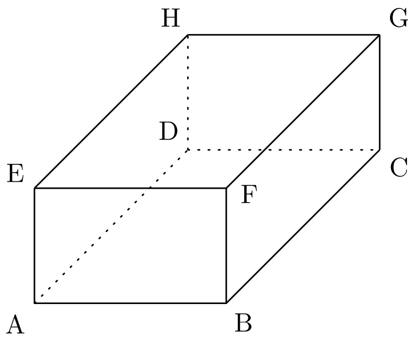
(1) P, Q, R の x 座標を p, q, r とするとき、$p^2+q^2+r^2$ を $pq+qr+rp$ のみで表せ。

(2) $\triangle PQR$ の重心はある放物線の上にあることを示せ。

第２４回　等面四面体

☆等面四面体

1 直方体の頂点を図のように A, B, C, D, E, F, G, H とし辺の長さを $AB=a$, $AD=b$, $AE=c$ とする。（東大）



(1) 対角線 AG が平面 EBD と交わる点を M とするとき、$AM : MG$ を求めよ。

(2) 四面体 $EBGD$ の体積を求めよ。

$\boxed{2}$ すべての面が合同な四面体 $ABCD$ がある。頂点 A, B, C はそれぞれ x, y, z 軸の正の部分にあり、辺の長さは $AB=2l-1$, $BC=2l$, $CA=2l+1$ $(l>2)$ である。
四面体 $ABCD$ の体積を $V(l)$ とするとき、次の極限値を求めよ。（東大）[90]

$$\lim_{l \to 2} \frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}$$

[90]等面四面体は直方体を削って作られるので $A(a,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ b,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ c)$, $D(a,\ b,\ c)$ とおく。

$\boxed{3}$ $BC = DA = a$, $CA = BD = b$, $AB = CD = c$ である四面体 $ABCD$ において、辺 AB, BC, CD, DA, CA, BD の中点をそれぞれ P, Q, R, S, T, U とする。

(1) 2つの線分 PR, QS は交わり、$PR \perp QS$ であることを示せ。

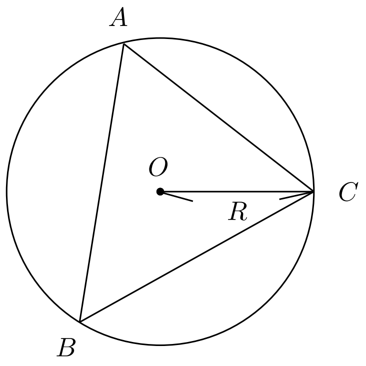
(2) P, Q, R, S, T, U を頂点とする八面体の体積を a, b, c を用いて表せ。

$\boxed{4}$ $\triangle ABC$ は鋭角三角形とする。このとき、各面すべてが $\triangle ABC$ と合同な四面体が存在することを示せ。(京大)

$\boxed{5}$ 一辺が 1 の正四面体 V を平面 α に正射影した図形の面積を S とするとき、S の最大値、最小値を求めよ。（東大）

第２５回　公式の証明

$\boxed{1}$ 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ を証明せよ。



$\boxed{2}$ 余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を証明せよ。

$\boxed{3}$ 直線 $ax+by+c=0$ と点 $(x_0,\ y_0)$ の距離を与える公式 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を証明せよ。（津田塾大）

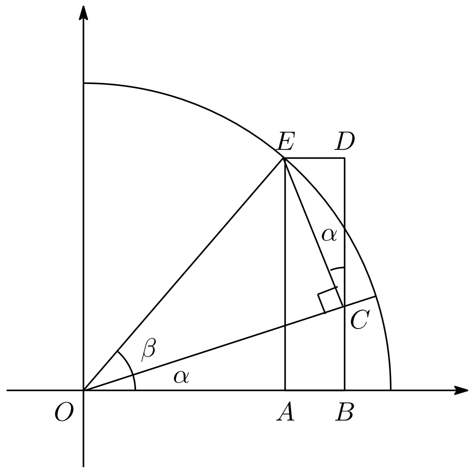
$\boxed{4}$ 原点を中心とする半径 r $(r>0)$ の円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は $ax+by=r^2$ で与えられることを示せ。（九州大）

$\boxed{5}$ 一般角 α, β に対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。(東大)[91]



$\boxed{6}$ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ (ド・モアブルの公式)を証明せよ。(慶應大)

[91]オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を使っても良い。

$\boxed{7}$ $\log_a b + \log_a c = \log_a bc \quad (a > 0,\ \ b > 0,\ \ c > 0,\ \ a \neq 1)$ を証明せよ。

$\boxed{8}$ $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0,\ \ b > 0,\ \ c > 0,\ \ a \neq 1,\ \ c \neq 1)$ を証明せよ。（三重大）

$\boxed{9}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を証明せよ。（大阪教育大）

$\boxed{10}$ $\triangle ABC$ の面積 S は $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2 - \{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\}^2}$ になることを示せ。（九州大）

$\boxed{11}$ 2つのベクトル $\overrightarrow{OA} = (a_1,\ \ a_2)$, $\overrightarrow{OB} = (b_1,\ \ b_2)$ とそのなす角を θ とする。$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$ と定義するとき、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = a_1b_1 + a_2b_2$ であることを示せ。

$\boxed{12}$ 定数 α, β $(\alpha < \beta)$ に対し

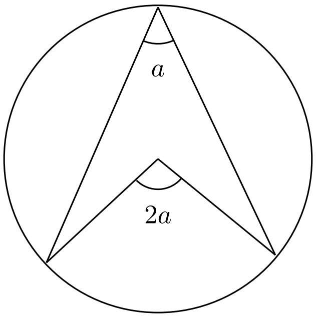
$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

が成り立つことを示せ。（南山大）

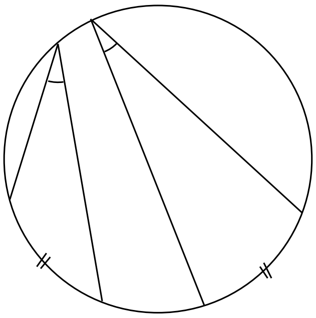
$\boxed{13}$ 二項定理 $(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n$ が成り立つことを証明せよ。（広島大）

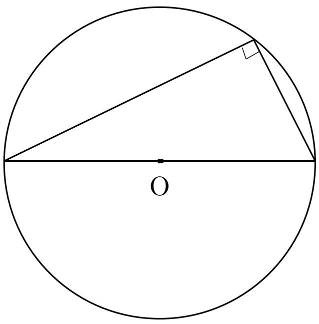
第２６回　円周角

☆円周角の定理

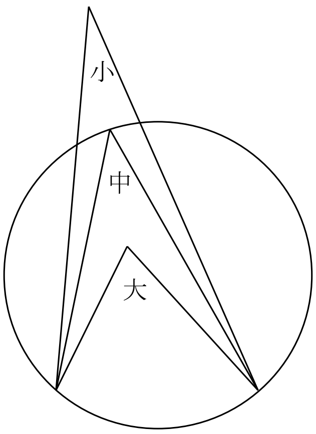


(1)


(2)



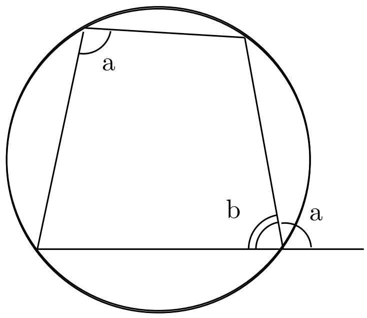
(3)



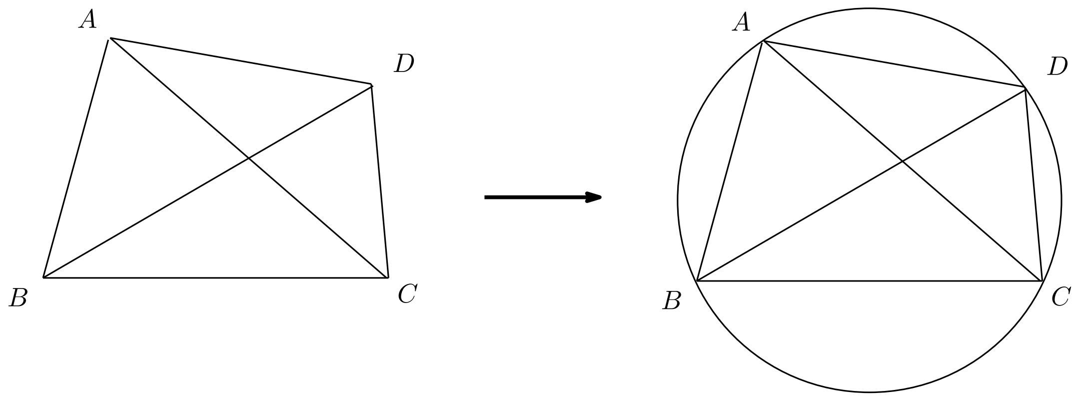
(4)

☆円に内接する四角形

$$a + b = 180^\circ$$



☆円周角の定理の逆

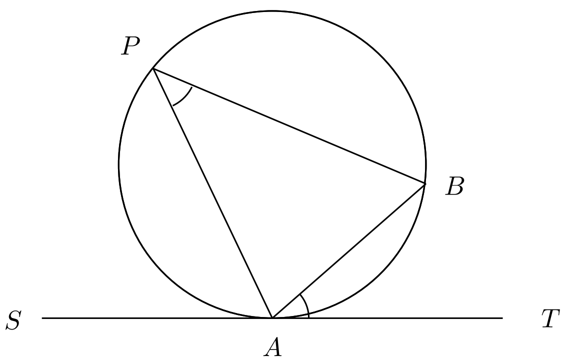


□ $\angle BAC = \angle BDC$ のとき

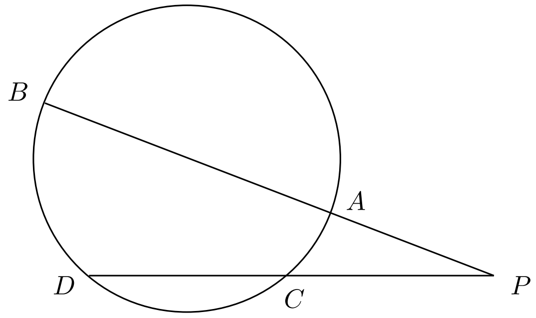
□ $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ のとき

円周角の定理の逆により四角形 $ABCD$ が同一円周上にあるとしてよい。

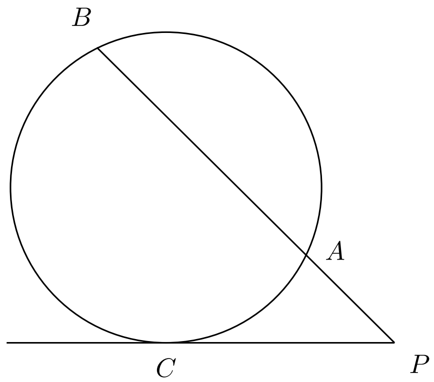
☆接弦定理
$\angle APB = \angle TAB$ である。



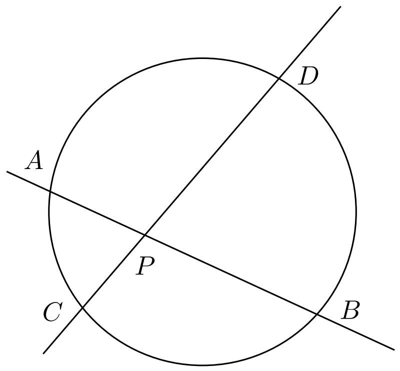
☆方べきの定理１
$PA \times PB = PC \times PD$ である。



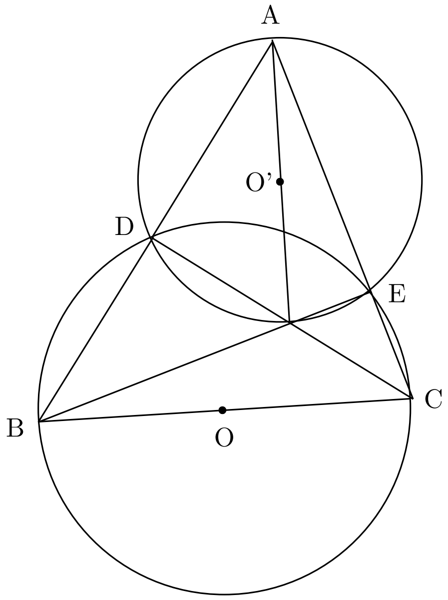
☆方べきの定理２
$PA \times PB = PC^2$ である。



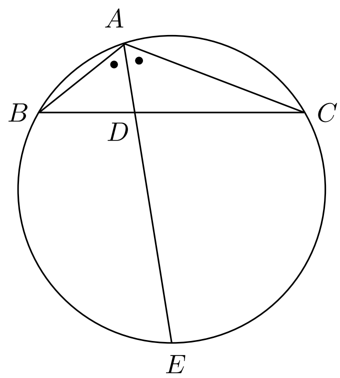
☆方べきの定理３
$PA \times PB = PC \times PD$ である。



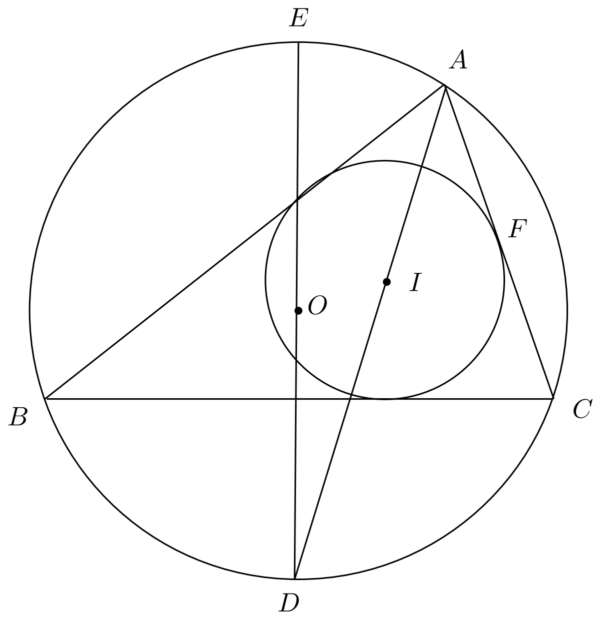
$\boxed{1}$ $\angle DAE = 56^\circ$ のとき $\angle DOE$ を求めよ。



$\boxed{2}$ $\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線が BC および $\triangle ABC$ の外接円と交わる点をそれぞれ D, E とする。$AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 7$, $\angle BAC = 120^\circ$ のとき AD の長さを求めよ。



$\boxed{3}$ $\triangle ABC$ の内心を I 、外心を O 、内接円の半径を r 、外接円の半径を R とする。

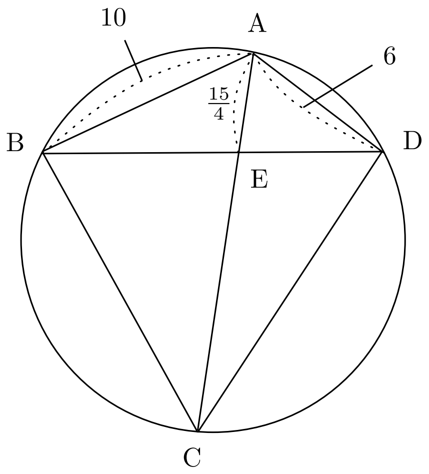


(1) $BD : FI = DE : IA$ を証明せよ。

(2) $ID = BD$ を証明せよ。

(3) $AI \cdot ID$ を $r,\ R$ で表せ。

$\boxed{4}$ 円に内接する四角形 $ABCD$ があり、$AB=10$, $AD=6$, $\angle BAC=\angle DAC$ である。また AC と BD の交点を E とし、$AE=\frac{15}{4}$ である。

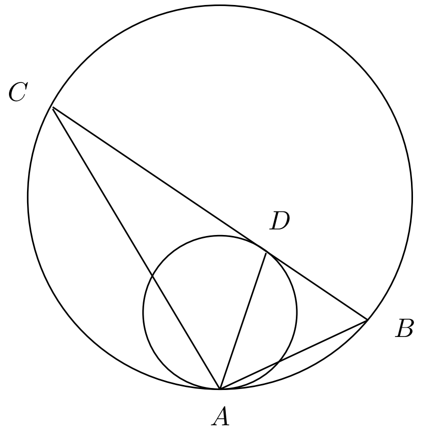


(1) AC の長さを求めよ。

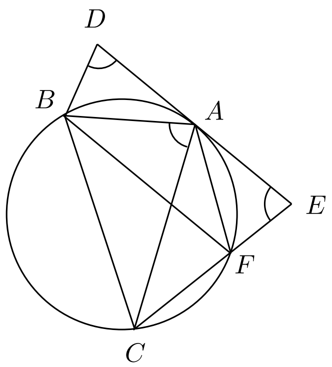
(2) BE : ED を最も簡単な整数の比で表せ。

(3) BD の長さを求めよ。

$\boxed{5}$ A で内接する２つの円がある。外円の弦 BC が内円に D で接するとき、AD が $\angle BAC$ を二等分することを証明せよ。



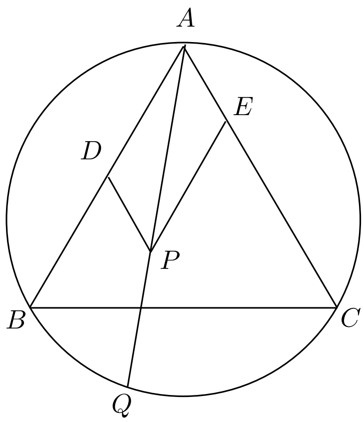
$\boxed{6}$ 図のように、$\triangle ABC$ の外接円の点 A における接線上に $\angle BDA = \angle BAC = \angle CEA$ となるような点 $D,\ E$ をとり、線分 CE と円との交点を F とするとき、次の問いに答えよ。



(1) $\triangle ABF$ が二等辺三角形であることを証明せよ。

(2) $DA = AE$ であることを証明せよ。

$\boxed{7}$ $\triangle ABC$ は1辺の長さが 10 の正三角形で、 $AD = 5$, $AE = 3$ である。また四角形 $ADPE$ は平行四辺形で、Q は AP の延長と $\triangle ABC$ の外接円との交点である。[92]



(1) AP の長さを求めよ。

(2) PQ の長さを求めよ。

[92] $BQ + CQ = AQ$

$\boxed{8}$ 円に内接する四角形 $ABCD$ において $AB = 2,\ \ BC = \sqrt{5} + 1,\ \ CA = 2\sqrt{2}$ である。また $\triangle ABD$ の面積 ： $\triangle BCD$ の面積 の比が $\sqrt{5} - 1$ ： 1 とする。このとき次の問いに答えよ。（センター試験・改）

(1) $\angle ABC$ の大きさを求めよ。

(2) AD ： CD の比を求めよ。

(3) CD の長さを求めよ。

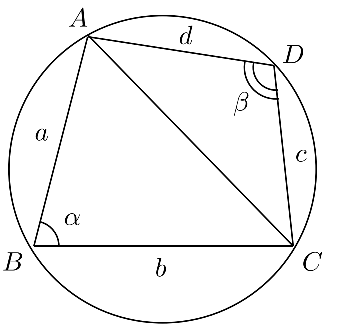
$\boxed{9}$ $\triangle ABC$ において、$AB=7,\ \ BC=3$ である。$\triangle ABC$ の内心を I とする。AI の延長と辺 BC との交点を D とし、BI の延長と辺 AC との交点を E とする。4 点 $C,\ \ E,\ \ I,\ \ D$ は同一円周上にあるものとする。(センター試験)

(1) $\angle BCA = \angle AI\square^{ア} = \angle B\square^{イ}\square^{ウ} + \angle A\square^{エ}\square^{オ}$ であるから、$\angle BCA = \square^{カ}\square^{キ\circ}$ である。したがって、$CA = \square^{ク}$ である。また $BD = \frac{\square^{ケ}}{\square^{コ}},\ \ BI\cdot BE = \frac{\square^{サ}\square^{シ}}{\square^{ス}}$ である。

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径は $\frac{\square^{セ}}{\square^{ソ}}\sqrt{\square^{タ}}$ である。また $\triangle ABC$ の面積は $\square^{チ}\sqrt{\square^{ツ}}$ であり、$\triangle ABC$ の内接円の半径は $\frac{\square^{テ}}{\square^{ト}}\sqrt{\square^{ナ}}$ である。

$\boxed{10}$ ☆ブラーマグプタの公式

図のように円に内接する四角形 $ABCD$ において、$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$ とし、$\angle ABC=\alpha$, $\angle CDA=\beta$ とする。さらに $S=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ とするとき、次の各問いに答えよ。（立命館大）[93]



(1) $\overline{AC}$ を a, b, α を用いて表すと、$\overline{AC}^2=\square^{ア}$ である。

(2) $\cos\beta=-\cos\alpha$ の関係を用いて $\cos\alpha$ を a, b, c, d で表すと、$\cos\alpha=\frac{\square^{イ}}{2(ab+cd)}$ となる。

(3) $\sin^2\alpha=(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$ なる関係と、$\sin\alpha>0$ なることに注目すると、$\sin\alpha=\square^{ウ}\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}$ となる。

(4) したがって、四角形の面積 T は、$\sin\beta=\sin\alpha$ なので、$T=\triangle ABC+\triangle ADC=\square^{エ}$ となる。

---

[93][類] ☆ヘロンの公式 3辺が a, b, c である $\triangle ABC$ の面積 S は $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ として $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で表されることを証明せよ。

I・II・A・B 受験編解答

第 1 回　式の計算

$\boxed{1}$

(1) $(x+2y-2)(x+2y+1)$

(2) $(2x+3y-1)(4x+2y+1)$

(3) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$

(4) $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$

(5) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(6) $(x+a)(x-3)(x+1)$

(7) $3(a-b)(b-c)(c-a)$

類 $(x-1)(x+a)(x+a+3)$

$\boxed{2}$

(1) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(2) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

(3) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(4) $2-\sqrt{3}$

(5) $3-\sqrt{6}$

(6) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$

(7) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$

(8) $2\sqrt{3}+1$

(9) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{3}$ $7a-2$

類 $\sqrt{-a+1}-\sqrt{-a}$

$\boxed{4}$ $k=0,\ 1$ のとき 0 、$k=2$ のとき 1 、$k=3$ のとき $a+b+c$

$\boxed{5}$

(1) 0

(2) 27

$\boxed{6}$ $-6+16\sqrt{3}i$

$\boxed{7}$ $(x-1)(y-1)(z-1)=(xyz-1)+\{(x+y+z)-(xy+yz+zx)\}=0$ を示す。

類 -8

$\boxed{8}$ $A=1,\ \ B=7,\ \ C=6,\ \ D=1$

$\boxed{9}$ 6

類 2

第２回　因数定理

$\boxed{1}$ (1) 13

(2) 6

$\boxed{2}$ (1) $(x+1)(x+2)(x+3)$

(2) $(3x+2)(x^2+x+1)$

$\boxed{3}$ $a=2,\ \ b=-14$

$\boxed{4}$ $2x$

$\boxed{5}$ $7x-12$

$\boxed{6}$ $a=-2,\ \ b=3,\ \ c=3$

$\boxed{7}$ (1) $x-1$

(2) $x-1$

(3) $5x-5$

$\boxed{8}$ $-x^2+4x-4$

$\boxed{9}$ 割り切れる

$\boxed{10}$ $-3x+3$

$\boxed{11}$ $a=9,\ \ b=8,\ \ c=9,\ \ d=1$

類 0

$\boxed{12}$ $\pm1,\ \ \pm\frac{1}{2},\ \ \pm\frac{1}{4}$ を代入して 0 にならなければ有理数の解はない。

$\boxed{13}$ ２次方程式が有理数解を持つとすると因数定理より解は $x=\pm1$ に限られる。

$\boxed{14}$ $(\pm1,\ \ 0,\ \ \pm1),\ \ (\pm2,\ \ 2,\ \ \pm2),\ \ (\pm3,\ \ 4,\ \ \pm3)$

類 (1) 与式の両辺を３乗すると、$\alpha^3=2-\alpha$ が得られる。

(2) $\alpha^3+\alpha-2=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+2)$ より $\alpha=1$

第３回　方程式

$\boxed{1}$ (1) $a=0$ のとき解なし。$a=1$ のときすべての実数。$a\neq0,\ \ 1$ のとき $\frac{1}{a}$

(2) $(x,\ \ y)=(2,\ \ -1),\ \ (-1,\ \ -1),\ \ (-1,\ \ 2)$

(3) $(x,\ \ y,\ \ z)=(-1,\ \ 1,\ \ 2),\ \ (-1,\ \ 2,\ \ 1),\ \ (1,\ \ -1,\ \ 2),$
$(1,\ \ 2,\ \ -1),\ \ (2,\ \ -1,\ \ 1),\ \ (2,\ \ 1,\ \ -1)$

(4) $(x,\ y,\ z)=(-1,\ 1,\ 2),\ (-1,\ 2,\ 1),\ (1,\ -1,\ 2),$
$(1,\ 2,\ -1),\ (2,\ -1,\ 1),\ (2,\ 1,\ -1)$

$\boxed{2}$ $k=-4,\ x=3$

$\boxed{3}$ (1) $a=10$

(2) $a=-8$

$\boxed{4}$ $k=-3,\ 2$

$\boxed{5}$ 27

類 1 -2

類 2 995

$\boxed{6}$ $k \leqq -1,\ 3 \leqq k$

$\boxed{7}$ （ア）$a<-4$ （イ）$x=-\frac{\sqrt{4-a}+\sqrt{-4-a}}{2}$

$\boxed{8}$ $(a,\ b)=(1,\ 0)$ のとき $x=0,\ -1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
$(a,\ b)=(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2})$ のとき $x=\frac{1\pm\sqrt{15}i}{4},\ \frac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}$

第４回　不等式

$\boxed{1}$ (1) $\frac{3-\sqrt{29}}{2} \leqq x \leqq \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \frac{3+\sqrt{29}}{2}$

(2) $1 \leqq x \leqq 2,\ 3<x$

(3) $\frac{5-\sqrt{41}}{2} \leqq x \leqq \frac{1+\sqrt{41}}{2}$

(4) $x \leqq -\sqrt{7},\ 2-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{7},\ 2+\sqrt{3} \leqq x$

(5) $a<1$ のとき $a<x<1$ 、$a=1$ のとき解なし、$a>1$ のとき $1<x<a$

(6) $0<a<1$ のとき $x<a,\ \frac{1}{a}<x$ 、$a=1$ のとき $x=1$ 以外のすべての実数、$1<a$ のとき $x<\frac{1}{a},\ a<x$

$\boxed{2}$ (1) $(x-\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2 \geqq 0$ または $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+x^2+y^2\} \geqq 0$　等号成立は $x=y=0$ のとき

(2) $(x-\frac{y+z}{2})^2+\frac{3}{4}(y-z)^2 \geqq 0$ または $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geqq 0$ 等号成立は $x=y=z$ のとき

$\boxed{3}$ $x=-3,\ y=2$ のとき 3

$\boxed{4}$ $x=\frac{1}{14},\ y=\frac{1}{7},\ z=\frac{3}{14}$ のとき $\frac{1}{14}$

$\boxed{5}$ $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqq 0$ より

$\boxed{6}$ $\sqrt[3]{x}=X,\ \sqrt[3]{y}=Y,\ \sqrt[3]{z}=Z$ として $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ=(X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)=\frac{1}{2}(X+Y+Z)\{(X-Y)^2+(Y-Z)^2+(Z-X)^2\} \geqq 0$

類 (1) $(1,\ 2,\ 3)$

(2) 相加相乗平均より $x^3+y^3+z^3 \geqq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}=3xyz$ である。一方 x, y, z は正の実数なので $3xyz > xyz$ である。よって $n=3$ のとき方程式を満たす正の実数の組 (x, y, z) は存在しない。

$\boxed{7}$ $(e)48$, (f) A君の等号成立条件が間違えているので、B君が正しい。

$\boxed{8}$ 最小値 0 、最大値 4

類 24

類 $3-2\sqrt{2}$

$\boxed{9}$ 4

$\boxed{10}$ $a+b+c \geqq 3\sqrt[3]{abc}$, $ab+bc+ca \geqq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ より

$\boxed{11}$ (1) $\frac{(a-1)^2(a^2+a+1)}{a^2} \geqq 0$

(2) $\frac{(a-1)^2(a^4+a^3+a^2+a+1)}{a^3} \geqq 0$

$\boxed{12}$ (1) $(a-1)(b-1)>0$

(2) $abc+2>ab+c+1=a+1+c>a+b+c$

$\boxed{13}$ $2(a^2+b^2+c^2)-(c-a)^2=(a+c)^2+2b^2 \geqq 0$ 等号成立は $a+c=0$, $b=0$ のとき
$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$ より $3(a^2+b^2+c^2)-2(c-a)^2=-2(b-a)(c-b)<0$

$\boxed{14}$ (1) $(\frac{a+b}{2})^2 < \frac{a^2+b^2}{2}$

(2) $(\frac{a+2b}{3})^2 < \frac{a^2+2b^2}{3}$

(3) $sa^2+tb^2>(sa+tb)^2$

(4) $\log(\frac{a+b}{2}) > \frac{\log a+\log b}{2}$

$\boxed{15}$ $y=t^n \ (t>0)$ について考える。

$\boxed{16}$ $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

第５回　２次関数（１）

$\boxed{1}$ (1) $y=-\frac{1}{4}x^2+x$

(2) $y=x^2-2x$, $y=2x^2-6x+3$

(3) $y=x^2-8x+15$

(4) $y=\frac{1}{4}x^2-x-8$

(5) $y=x^2-4x+3$, $y=\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{3}x+3$

$\boxed{2}$ (1) a $+$, b $-$, c $-$, b^2-4ac $+$

(2) a $-$, b $+$, c $-$, b^2-4ac $+$

$\boxed{3}$ (1) $4<a$

(2) $-12 < a < -3$

(3) $a < -12$

$\boxed{4}$ (1) $D > 0$, $1 <$ 軸, $f(1) > 0$

(2) $D > 0$, 軸 < -1, $f(-1) > 0$

(3) $f(2) < 0$

(4) $D > 0$, $1 <$ 軸 < 3, $f(1) > 0$, $f(3) > 0$

(5) $f(1) \times f(3) < 0$

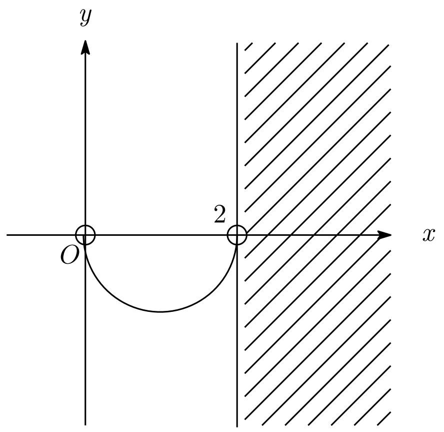
(6) $f(1) \times f(3) < 0$ または $D = 0$, $1 <$ 軸 < 3

(7) $f(2) < 0$, $f(5) < 0$

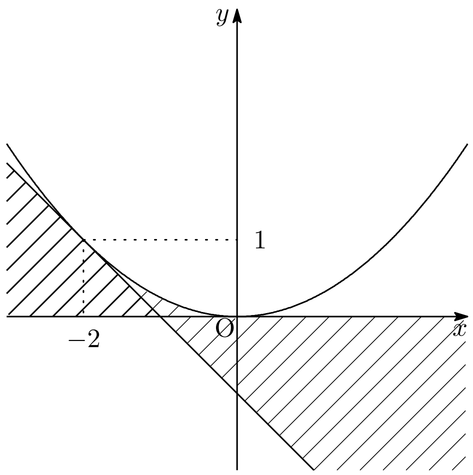
(8) $f(1) > 0$, $f(2) < 0$, $f(3) > 0$

(9) $f(1) > 0$, $f(2) < 0$, $f(5) < 0$, $f(6) > 0$

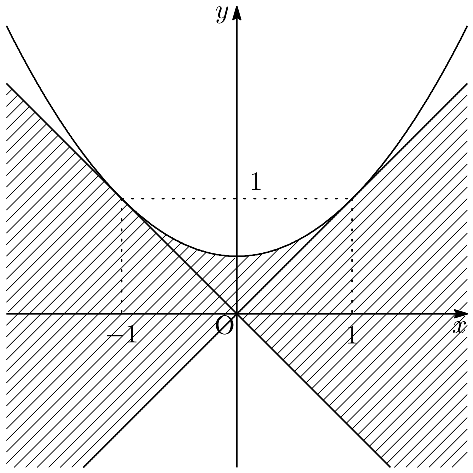
$\boxed{5}$ $(a-1)^2 + b^2 = 1$ $(b < 0)$ または $2 < a$



$\boxed{6}$ $y(x+y+1) \leqq 0$ または $0 \leqq -\frac{x}{2} \leqq 1$ のとき $y \leqq 0$, $x+y+1 \geqq 0$, $x^2 - 4y \geqq 0$

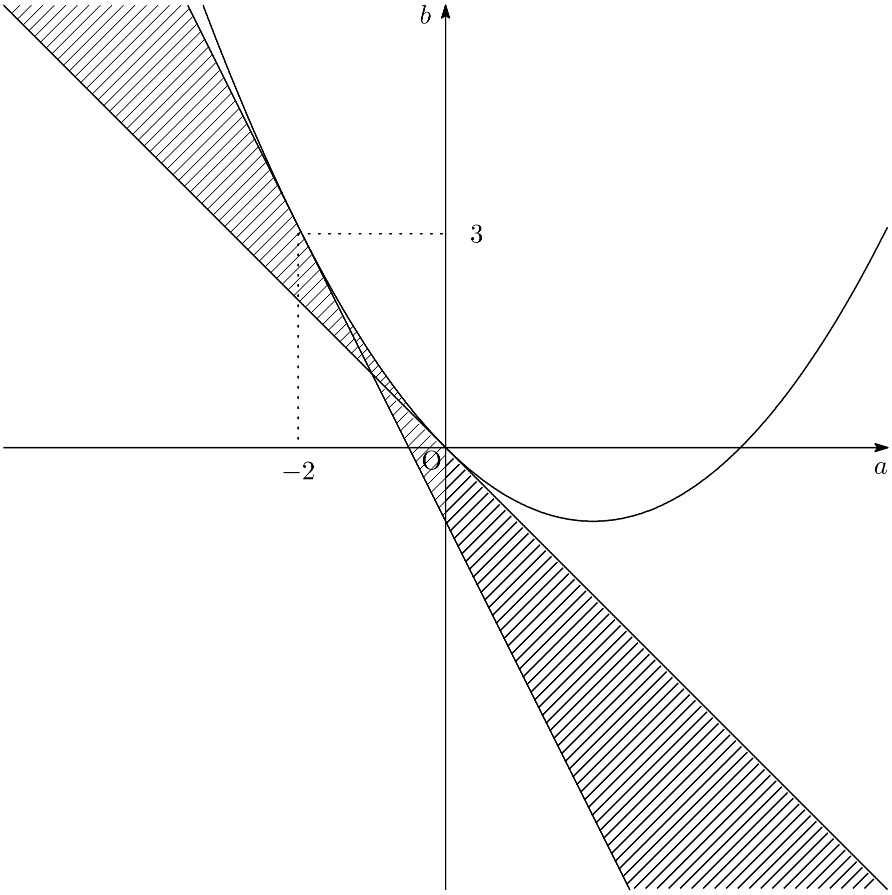


類 $y \geqq x$, $y \leqq -x$ または $y \leqq x$, $y \geqq -x$ または $y \geqq$, $y \geqq -x$, $y \leqq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$



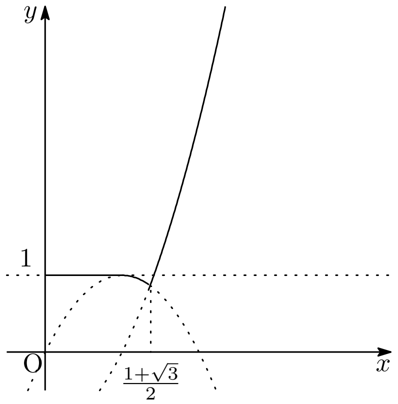
$\boxed{7}$ $(m,\ n) = (3,\ 3)$ $x = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{8}$ $(a+b)(2a+b+1) \leqq 0$ または $-2 \leqq a \leqq 0,\ \ b \geqq -1,\ \ b \geqq -a,\ \ b \leqq \frac{1}{4}a^2 - a$



第６回　２次関数（２）

$\boxed{1}$ $0 \leqq a \leqq 1$ のとき $g(a) = 1$ 、$1 < a \leqq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき $g(a) = -a^2 + 2a$ 、$\frac{1+\sqrt{3}}{2} < a$ のとき $g(a) = a^2 - 1$



$\boxed{2}$ (1) $x = 2$ のとき最大値 $-4a + 5$ 、$x = 0$ のとき最小値 1

(2) $x = 2$ のとき最大値 $-4a + 5$ 、$x = a$ のとき最小値 $-a^2 + 1$

(3) $x = 0,\ 2$ のとき最大値 1 、$x = 1$ のとき最小値 0

(4) $x = 0$ のとき最大値 1 、$x = a$ のとき最小値 $-a^2 + 1$

(5) $x = 0$ のとき最大値 1 、$x = 2$ のとき最小値 $-4a + 5$

$\boxed{3}$ (1) すべての実数

(2) $a < 1$

(3) $a > 1$

(4) ない

$\boxed{4}$ (1) $a = \frac{3}{32}$ のとき最小値 $\frac{55}{64}$

(2) $a = 1$ のとき最大値 14

$\boxed{5}$ $x + y$ は $x = y = 3$ のとき最大値 6 、$x = 0,\ y = 2$ のとき最小値 2

$x^2 + y^2$ は $x = y = 3$ のとき最大値 18 、$x = \frac{4}{5},\ y = \frac{8}{5}$ のとき最小値 $\frac{16}{5}$

類　$2x + y$ は最大値 6 、最小値 2

$x^2 + y^2$ は最大値 $\frac{45}{4}$ 、最小値 $\frac{16}{5}$

$\boxed{6}$ (1) $\frac{1}{2}$

(2) 最大値 $\sqrt{2}$ 、最小値 $-\sqrt{2}$

(3) 最大値 3 、最小値 $\frac{3}{4}$

$\boxed{7}$ 5

$\boxed{8}$ 2

$\boxed{9}$ (1) $t = \frac{2}{3}n$

(2) $t=\frac{1}{2}$ のとき最大値 2 、$t=\frac{19}{52}$ のとき最小値 $\frac{55}{52}$

$\boxed{10}$ 最大値 $\frac{1}{5}$ 、最小値 $\frac{1}{15}$

第 7 回　整数問題

$\boxed{1}$ 121

$\boxed{2}$ $0.3\dot{6}$

$\boxed{3}$ (1) $n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)-6n^2$ など

(2) $m^3n-mn-mn^3+mn=nm(m-1)(m+1)-mn(n-1)(n+1)$

(3) $n(n+1)(n+2)(n+3)-4(n-1)n(n+1)$

$\boxed{4}$ (1) $n=7k+2$ のとき (与式) $=7(7k^2+5k+1)$ 、$n=7k+4$ のとき (与式) $=7(7k^2+9k+3)$

(2) $n^7-n=(n-1)n(n+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)$ である。$(n-1)n(n+1)$ は連続 3 数の積なので 6 の倍数である。一方 $n=7k$ のとき n が、$n=7k+1$ のとき $(n-1)$ が、$n=7k+2,\ 7k+4$ のとき (n^2+n+1) が、$n=7k+3,\ 7k+5$ のとき (n^2-n+1) が、$n=7k+6$ のとき $(n+1)$ がそれぞれ 7 の倍数になるから、n^7-n は 42 で割り切れる。

類 $n^9-n^3=n^3(n+1)(n-1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)$ と因数分解して $n=3k,\ n=3k+1,\ n=3k+2$ を代入して 9 の倍数になることを確認する。

$\boxed{5}$ (1) $(x,\ y)=(5,\ 17),\ (6,\ 10),\ (11,\ 5),\ (18,\ 4),\ (3,\ -11),\ (2,\ -4),$
$(-3,\ 1),\ (-10,\ 2)$

(2) $(x,\ y)=(-3,\ 0)$

$\boxed{6}$ (1) $(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

(2) $(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 7)$ のとき $\frac{41}{42}$

$\boxed{7}$ (1) $(x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$

(2) $(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$

類 $A<B<C$ としても一般性は失わない。$\frac{\pi}{3}<A$ だとすると矛盾するので $0<A<\frac{\pi}{3}$ である。したがって $\tan A=1$ 。$\tan(B+C)=\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$ と $B+C=\frac{3}{4}\pi$ から $(\tan B-1)(\tan C-1)=2$ より $\tan B=2,\ \tan C=3$

$\boxed{8}$ (1) $k=-4$

(2) $(x,\ y)=(2,\ 1),\ (2,\ 3)$

$\boxed{9}$ (1) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$, $(p,q$ は互いに素$)$ とおける。$2p^2=q^2$ より q は偶数であるから $q=2r$ とおける。よって $2p^2=4r^2,\ p^2=2r^2$ になる。p も偶数であることになり、$p,\ q$ は互いに素とした仮定に矛盾する。よって $\sqrt{2}$ は無理数である。

(2) $3+2\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると　$3+2\sqrt{2}=\frac{q}{p}$, $(p,q$ は互いに素) とおける。この式を変形して $\sqrt{2}=\frac{q-3p}{2p}$ が得られる。左辺は無理数であるのに対し、右辺は有理数であるから矛盾する。

類 (1) $\sqrt[3]{2}$ が有理数であると仮定すると $\sqrt[3]{2}=\frac{q}{p}$, $(p,q$ は互いに素) とおける。 $2p^3=q^3$ より q は偶数であるから $q=2r$ とおける。よって $2p^3=8r^3$, $p^3=4r^3$ になる。p も偶数であることになり、p, q は互いに素とした仮定に矛盾する。よって $\sqrt[3]{2}$ は無理数である。

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると　$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{q}{p}$, $(p,q$ は互いに素) とおける。この式を変形して $\sqrt{6}=\frac{q^2-5p^2}{2p^2}$ が得られる。左辺は無理数であるのに対し、右辺は有理数であるから矛盾する。

(3) $\log_2 3=\frac{q}{p}$ が有理数であると仮定すると $\log_2 3=\frac{q}{p}$, $(p,q$ は互いに素) とおける。$p\log_2 3=q\log_2 2$ より $3^p=2^q$ になる。左辺は奇数であるのに対し、右辺は偶数であるから矛盾する。よって $\log_2 3$ は無理数である。

(4) $\tan 1^\circ$ が有理数であると仮定すると $\tan 1^\circ+1^\circ=\frac{2\tan 1^\circ}{1-\tan^2 1^\circ}$ より $\tan 2^\circ$ も有理数になる。これを繰り返すと $\tan 30^\circ$ も有理数になるがこれは矛盾。

$\boxed{10}$ (1) $\sqrt{2}-1$

(2) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $-1+\sqrt{2}$

類 2

$\boxed{11}$ $n=10k+l$ $(l=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ で場合分け。3

$\boxed{12}$ $n=3k$, $3k+1$, $3k+2$ で場合分けすると、n^2+2 が 3 の倍数になる。よって $n=3k$ のとき $3k$ が素数であるのは $k=1$ つまり $n=3$ のときだけである。

類 $n=3k$, $3k+1$, $3k+2$ で場合分けすると、$n=3k+1$ のとき $n+2$ が、$n=3k+2$ のとき $n+4$ が 3 の倍数になる。よって $n=3k$ のとき $3k$ が素数であるのは $k=1$ つまり $n=3$ のときだけである。

$\boxed{13}$ (1) a は偶数であるから $a=2p$ とおける。$a=2p$ を代入すると与式は $b^3+2c^3+4p^3=2bcp$ になる。同様にして b, c も偶数になる。

(2) a, b, c が無限に 2 で割り切れるためには $a=b=c=0$ しか有り得ない。

$\boxed{14}$ (1) 0

(2) 4

(3) n が偶数のとき 1 、n が奇数のとき 3

$\boxed{15}$ 15

類 213

$\boxed{16}$ $\frac{p^n-1}{p-1}$

$\boxed{17}$ $(x,\ y)=(3m+2,\ 5m+2)$

$\boxed{18}$ $(x,\ \ y) = (13m - 6,\ \ -212m + 98)$

$\boxed{19}$ (1) $(x,\ \ y) = (11m + 6,\ \ 14m + 7)$

(2) $(x,\ \ y) = (-5,\ \ -7)$

(3) $2(7x - 6y) = 7$ と式変形すると、左辺は偶数であるのに対し、右辺は奇数であるから矛盾する。

$\boxed{20}$ $2x{+}3y = 17k$ とおき、これを満たす $(x,\ y)$ を求めると $(x,\ y) = (3m{+}34k,\ -2m{-}17k)$ になる。これらを $9x{+}5y$ に代入すると $9x{+}5y = 9(3m{+}34k){+}5(-2m{-}17k) = 17(m{+}13k)$ になる。よって $9x{+}5y$ も 17 で割り切れる。またその逆も確認する。$(x,\ y) = (3,\ -2),\ (37,\ -19)$

$\boxed{21}$ 1, 2, 4, 7

$\boxed{22}$ $\frac{1}{2\sqrt{29}}$

$\boxed{23}$ $f(1) = a + b = m,\ \ f(2) = 4a + 2b = 2l\ \ m,\ \ l$ は整数 とおくと $a = l - m,\ \ b = 2m - l$ になる。よって $f(x) = (l - m)x^2 + (2m - l)x$ となり、$f(x)$ は整数係数だけになるので、すべての整数 n について $f(n)$ は整数になる。

$\boxed{24}$ (1) $a = \pm 3$

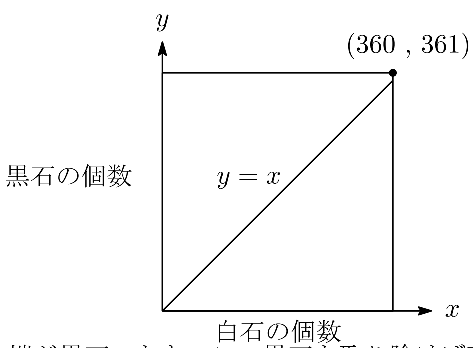
(2) $a = 3$ のとき $2x^3 + 3x^2 + x = x(x+1)(x+2) + (x-1)x(x+1)$ になるので $f(x)$ は 6 の倍数である。

$\boxed{25}$ $f(-1) = -a + b - c + d,\ \ f(0) = d,\ \ f(1) = a + b + c + d$ のいずれも 3 の倍数ではない。$x = 3k - 1$ のとき $f(3k-1) = 3(9ak^3 - 9ak^2 + 3ak + 3bk^2 - 2bk + ck) - a + b - c + d$ になるが、$3(9ak^3 - 9ak^2 + 3ak + 3bk^2 - 2bk + ck)$ は 3 の倍数であるのに対し、$-a + b - c + d$ は 3 の倍数ではないので、これが 0 になることは無い。$x = 3k,\ \ 3k + 1$ のときも同様。

$\boxed{26}$ (1) $f(x)$ が有理数解をもつとき、因数定理より解の候補は $\pm c$ の約数 に絞られる。よって有理数解をもつならば、解は整数である。

(2) ある自然数 $k\ \ (> 1)$ に対して、k 個の整数 $f(1),\ \ f(2),\ \ \cdots, f(k)$ のどれもが k で割り切れなければ、 $x = mk + l\ \ m,\ \ l$ は整数 $(0 \leqq l \leqq k - 1)$ のいずれもが前問と同様にして $f(x) = 0$ の整数解となり得ない。よって $f(x) = 0$ は整数解をもたない。有理数解を持つとすれば整数解なので、 $f(x) = 0$ は有理数解を持たない。

$\boxed{27}$



右端が黒石のとき、この黒石を取り除けば残りは白石と黒石が同数である。次に右端が白石のとき、この点の座標を $(1, 0)$ とすると、グラフより白石 180 個、黒石 181 個に対応する点 $(360, 361)$ に到達するまでに必ず $y = x$ を横切る点が存在する。

$\boxed{28}$ ある任意の線で分けた右側にある白玉の個数を $l_x = l$ とすると、線を一つ分回転したとき l_{x+1} は l_{x-1}, l_x, l_{x+1} のいずれかである。 $l < k$ のときは左側の白玉の個数 $2k - l > k$ なので、一つずつ回転してゆくとその線より右側の白玉の個数が k となる点が最低一つは存在する。

$\boxed{29}$ (1) ${}_pC_k = \frac{p \cdot (p-1) \cdots (p-k+2) \cdot (p-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}$ において分子 $p \cdot (p-1) \cdots (p-k+2) \cdot (p-k+1)$ は連続する k 個の整数の積であるから分母 $k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ の倍数である。 しただって ${}_pC_k$ は分子を分母で割り切ることができるので整数である。また ${}_pC_k$ は p を因数にもつが p は素数なので分母で約分されない。したがって ${}_pC_k$ はいずれも p で割り切れる。

(2) $(m+1)^p = m^p + {}_pC_1 m^{p-1} + {}_pC_2 m^{p-2} + \cdots + {}_pC_{p-1} m + 1$ であるが
${}_pC_1$, ${}_pC_2$, ${}_pC_3$, $\cdots$, ${}_pC_{p-1}$ はいずれも p で割り切れるので
$(m+1)^p$ と $m^p + 1$ は p で割った余りが等しい。
$(m+1)^p \equiv m^p + 1 \pmod{p}$
$(m+1)^p \equiv (m-1)^p + 2 \pmod{p}$
$(m+1)^p \equiv 1^p + m \pmod{p}$
$(m+1)^p \equiv m + 1 \pmod{p}$
したがって $n^p \equiv n \pmod{p}$

第８回　三角関数

$\boxed{1}$ $\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\boxed{3}$ (1) $\angle B = \angle R$ の直角三角形または $AB = BC$ の二等辺三角形

(2) $AB = AC$ の二等辺三角形または $\angle A = 120^\circ$ の三角形

$\boxed{4}$ (1) $\frac{1}{11}$

(2) $\sqrt{\frac{299}{11}}$

(3) $2\sqrt{30}$

$\boxed{5}$ (1) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

(2) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

(3) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

$\boxed{6}$ (1) $\frac{6}{7} < a < 2$

(2) $\frac{3}{2}$

$\boxed{7}$ $k < 0$, $5 < k$ のとき 0 個、$k = 5$ のとき 1 個、$3 < k < 5$, $k = 0$ のとき 2 個、$k = 3$ のとき 3 個、$0 < k < 3$ のとき 4 個

類 $a < -6$, $2 < a$ のとき 0 個、$a = -6$, 2 のとき 1 個、$-6 < a < -\frac{2}{27}$, $0 < a < 2$ のとき 2 個、$a = -\frac{2}{27}$, 0 のとき 4 個、$-\frac{2}{27} < a < 0$ のとき 6 個

$\boxed{8}$ $\theta = \frac{11}{12}\pi$ のとき最小値 $-4 + 3\sqrt{3}$ 、$\theta = \frac{5}{12}\pi$ のとき最大値 $4 + 3\sqrt{3}$

類１ 最大値 $\sqrt{61}$ 、最小値 5

類２ $a=\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $b=\frac{5}{2}$

$\boxed{9}$ $\theta=\frac{\pi}{6}$, $p=3$

類 $\frac{\pi}{4}$

$\boxed{10}$ (1) 1

(2) $\alpha=\frac{3}{4}\pi$, $\beta=\frac{7}{4}\pi$

類 $\frac{59}{72}$

$\boxed{11}$ $-\pi$, 0, π

類 2

$\boxed{12}$ (1) 周期関数である。周期は 2π

(2) 周期関数である。周期は 2π

(3) 周期関数である。周期は π

(4) 周期関数ではない。

$\boxed{13}$ $\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$

第９回指数・対数

$\boxed{1}$ (1) $2^{\frac{1}{6}}$

(2) $\frac{3}{16}$

(3) $\frac{125}{8}$

(4) a^2b^2

(5) 1

(6) $b^{\frac{5}{6}}$

(7) 4

(8) 4

(9) 6

(10) 3

$\boxed{2}$ (1) 0

(2) 0.3010

(3) 0.4771

(4) 0.6020

(5) 0.6990

(6) 0.7781

(7) $\times$

(8) 0.9030

(9) 0.9542

(10) 1

$\boxed{3}$ 0.84

$\boxed{4}$ (1) $\log_2 3 = \frac{q}{p}$ （p, q は互いに素）と置くと、$3^p = 2^q$ となり矛盾する。

(2) $n^p = 2^q$ になるので、$n = 2^m$ と置ける。したがって整数以外の有理数になることはありえない。

$\boxed{5}$ (1) 0

(2) ± 2

$\boxed{6}$ 5

$\boxed{7}$ 35

類 $a = 2,\ \ b = 3,\ \ c = 5$

$\boxed{8}$ 2

$\boxed{9}$ $\frac{35}{18}$

$\boxed{10}$ $4\log_5 2 < 2 < 3\log_5 3$

$\boxed{11}$ $\log_a \frac{a}{b} < \log_b \frac{b}{a} < \frac{1}{2} < \log_b a < \log_a b$

$\boxed{12}$ (1) 2^{18}

(2) $100,\ \ \sqrt{10}$

$\boxed{13}$ (1) $-1 < x \leqq -\frac{3}{5},\ \ 0 \leqq x < 1$

(2) $0 < x \leqq 8 - 2\sqrt{15},\ \ 8 + 2\sqrt{15} \leqq x$

$\boxed{14}$ (1) $\log_{10} 2^{10} > \log_{10} 10^3$

(2) $\log_{10} 7 < \log_{10} 8$

(3) $\log_{10} 13^3 > \log_{10} 2^{11}$

$\boxed{15}$ (1) 44 桁

(2) $8 \times 10^{43} < 18^{35} < 9 \times 10^{43}$

$\boxed{16}$ 小数第 90 位、5

類 48 桁

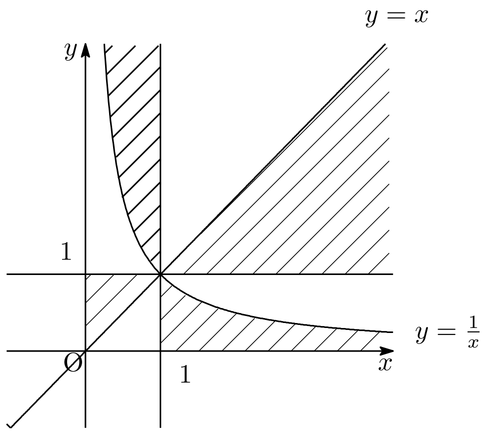
$\boxed{17}$ $\frac{1}{2} < a < 1$

$\boxed{18}$ $a = \frac{2}{6^r+1},\ \ b = -\frac{2^r+3^r}{6^r+1}$

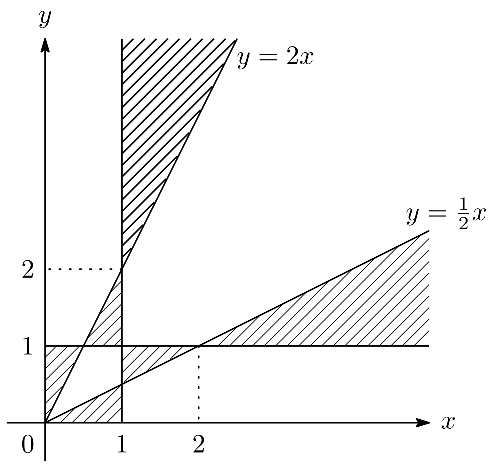
$\boxed{19}$ $x = y^3$

$\boxed{20}$ $1 \leqq a < \frac{5}{4}$ のとき $x = 1$ において最大値 $4 - 3a$
$a = \frac{5}{4}$ のとき $x = \pm 1$ において最大値 $\frac{1}{4}$
$\frac{5}{4} < a \leqq 2$ のとき $x = -1$ において最大値 $\frac{1}{4}$
$x = \log_2 a$ のとき最小値 $-a^2 + a$

$\boxed{21}$



類



第１０回　数列

$\boxed{1}$ (1) $a_n = -3n + 43$

(2) $S_n = -\frac{3}{2}n^2 + \frac{83}{2}n$

(3) $n = 14$ のとき最大値 287

$\boxed{2}$ (1) $a_n = 2^n$

(2) $S_n = 2^{n+1} - 2$

(3) 12

$\boxed{3}$ β は等比中項なので $\alpha \times \alpha\beta = \beta^2$ また $0 < \beta < 1$ のとき $\alpha < \alpha\beta < \beta$ 、$1 < \beta$ のとき $\alpha\beta < \alpha < \beta$ より $(\alpha,\ \beta) = (-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}),\ (-2,\ 4)$

$\boxed{4}$ $n=5$ のとき $d=5$ 、$n=10$ のとき $d=1$

$\boxed{5}$ $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$\boxed{6}$ $\frac{(3n+2)(n+1)}{2}$

類 $3n^2+3n+1$

$\boxed{7}$ (1) $a_n=3n^2+3n$

(2) $\frac{n}{3n+3}$

(3) $3\cdot 2^{n+1}(n^2-n+2)-12$

$\boxed{8}$ (1) $\frac{n(3n+1)}{2}$

(2) $n(3n+2)$

(3) $\frac{2^{3n+2}-4}{7}$

$\boxed{9}$ $\frac{129}{2}$

$\boxed{10}$ ア 10 、イ 16 、ウ 7 、エ 84

$\boxed{11}$ (1) $n^3+\frac{7}{2}n^2+\frac{15}{2}n$

(2) $\frac{7}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{6}n$

$\boxed{12}$ (1) $\frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{24}$

(2) $\frac{n^2(n-1)(n+1)^2}{6}$

$\boxed{13}$ $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$\boxed{14}$ (1) $\frac{n}{n+1}$

(2) $\frac{n}{2n+1}$

(3) $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

(4) $-1+\sqrt{n+1}$

(5) $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

$\boxed{15}$ (1) $2n^2-4n+3$

(2) 第 32 群の 47 番目

(3) $(2n-1)(2n^2-2n+1)$

類 (1) $\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1$

(2) $\frac{3}{2}n^3-\frac{1}{2}n$

$\boxed{16}$ $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$

$\boxed{17}$ $\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1$

第１１回　漸化式

$\boxed{1}$ (1) $a_n=3\cdot 4^{n-1}-1$

(2) $a_n=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{4}{3}$

(3) $a_n=5n-4$

(4) $a_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$

(5) $a_n=2^n-1$

(6) $a_n=\frac{1}{2n+1}$

(7) $a_n=(n+\frac{1}{2})2^n$

(8) $a_n=4\cdot 3^{n-1}-2^n$

(9) $a_n=\frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$

(10) $a_n=\frac{n+5}{2}$

(11) $a_n=-2^{n-1}+n+1$

(12) $a_n=2^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{2}}$

(13) $a_n=2^{2^{n-1}-1}$

(14) $a_n=2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}$

(15) $a_n=(2n+1)3^{n-2}$

(16) $a_n=\frac{3^n-1}{2}$，$b_n=\frac{3^n+1}{2}$

$\boxed{2}$ (1) ３項間漸化式を解くと $a_n-a_{n-1}=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_{n-2})$ なので、公比は $-\frac{1}{2}$

(2) $a_n=\frac{1}{3}(a_1+2a_2)-\frac{2}{3}(a_2-a_1)(-\frac{1}{2})^{n-1}$

(3) $\log_2 b_n=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$

$\boxed{3}$ (1) $a_{n+1}=3a_n+5b_n$，$b_{n+1}=a_n+3b_n$

(2) $c_n=(3-\sqrt{5})^n$

(3) $a_n=\frac{(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n}{2}$，$b_n=\frac{(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$

$\boxed{4}$ $2\cdot 3^n-3\cdot 2^{n-1}$

$\boxed{5}$ $a_n=\frac{6}{(n+1)(n+2)}$

$\boxed{6}$ $a_n=0\ \ (n=1)$，$a_n=\frac{2}{n(n-1)}\ \ (n\geqq 2)$

$\boxed{7}$ (1) $a_{n+1}=(n+1)a_n$

(2) $a_n=n!$

(3) $1-\frac{1}{(n+1)!}$

$\boxed{8}$ $-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{4}$

類１ $a_n=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}$

類2　$P_1(n)=\frac{1}{4}$，$P_2(n)=\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n+\frac{1}{4}$

$\boxed{9}$

(1) $\frac{5}{18}$

(2) $(-\frac{2}{9})(-\frac{4}{9})^{n-1}+\frac{1}{2}$

$\boxed{10}$

(1) $(B,\ D)$，$(B,\ G)$，$(D,\ B)$，$(D,\ G)$，$(E,\ B)$，$(E,\ D)$，$(E,\ G)$

(2) $r_n=(\frac{7}{9})^n$

(3) $p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}q_n$

(4) 3

$\boxed{11}$

(1) $b_n=\frac{n+1}{n+3}b_{n-1}$

(2) $b_n=\frac{12b_1}{(n+2)(n+3)}$

(3) $a_n=\frac{n}{n+2}$

(4) $\frac{1}{e^2}$

第１２回　数学的帰納法・二項定理

$\boxed{1}$ $n^3-(n-1)^3$ を利用する。

$\boxed{2}$

(1) $n=1$ のとき
（左辺）$=1^2=1$
（右辺）$=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$
よって（左辺）$=$（右辺）

(2) $n=k$ のとき与式が成り立つと仮定すると
$1^2+2^2+3^2+\cdots k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
$n=k+1$ のとき
$1^2+2^2+3^2+\cdots k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$
よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

(3) 数学的帰納法によりすべての自然数 n について与式が成り立つ。

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)\cdots$（二次式），$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdots$（三次式），$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2\cdots$（四次式）からの類推により $k=4$ と類推される。これを数学的帰納法で証明する。

$\boxed{4}$ 数学的帰納法で証明する。[別解] オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ より $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$

$\boxed{5}$ $n=1$ のとき $19+1\cdot2=21=3\times7$ 、$n=2$ のとき $361-1\cdot32=329=7\times47$ よりすべてを割り切る素数は 7 であると推測できる。

(1) $n=1$ のとき
（与式）$=21=3\times7$
よって与式は 7 で割り切れる。

(2) $n=k$ のとき与式が成り立つと仮定すると
$19^k+(-1)^{k-1}\cdot 2^{4k-3}=7m$ とおける。
$n=k+1$ のとき
$19^{k+1}+(-1)^k\cdot 2^{4k+1}=19^{k+1}+(7m-19^k)\times(-1)\times 2^4=19^k(19+16)-2^4\cdot 7m=$
$19^k\times 35-2^4\cdot 7m=7(5\times 19^k-2^4m)$
よって $n=k+1$ のときも与式は 7 で割り切れる。

(3) 数学的帰納法によりすべての自然数 n について与式は 7 で割り切れる。

$\boxed{6}$ (1) $n=2$ のとき
(左辺) $=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$
(右辺) $=\frac{13}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{4}$
よって (左辺) $\geqq$ (右辺)

(2) $n=k$ のとき与式が成り立つと仮定すると
$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\geqq\frac{13}{8}-\frac{1}{k}+\frac{1}{2k^2}$
$n=k+1$ のとき
$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\geqq\frac{13}{8}-\frac{1}{k}+\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$
ここで $\frac{13}{8}-\frac{1}{k}+\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}-\{\frac{13}{8}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}\}=\frac{1}{2k^2(k+1)^2}\geqq 0$ なので $\frac{13}{8}-\frac{1}{k}+\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\geqq\frac{13}{8}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}$ よって $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\geqq\frac{13}{8}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}$
したがって $n=k+1$ のときも成り立つ。

(3) 数学的帰納法により $n\geqq 2$ であるすべての自然数 n について与式が成り立つ。

$\boxed{7}$ (1) $n=1$ のとき
(与式) $=x+\frac{1}{x}=t$
$n=2$ のとき
(与式) $=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=t^2-2$
よって $n=1$, 2 のとき与式は t の n 次式である。

(2) $n=k,k+1$ のとき与式が t の k 次式であると仮定すると
$n=k,k+1$ のとき $x^k+\frac{1}{x^k}=f_k(t)$, $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=f_{k+1}(t)$ とおける。($f_k(t)$ は t の k 次式)
$n=k+2$ のとき $x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}=(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}})(x+\frac{1}{x})-(x^k+\frac{1}{x^k})=f_{k+1}(t)\times t-f_k(t)$
これは t の $k+2$ 次式である。

(3) 数学的帰納法によりすべての自然数 n について $x^n+\frac{1}{x^n}$ は t の n 次式である。

$\boxed{8}$ (1) 720

(2) 280

(3) -240

(4) 481

$\boxed{9}$ x^3 の係数 $30k+20$ 、x^4 の係数 $15k^2+60k+15$ 、x^4 の係数が最小になるとき $k=-2$

$\boxed{10}$ ${}_{80}C_k 5^{80-k}x^k$ より $P_k={}_{80}C_k 5^{80-k}$ として $\frac{P_{k+1}}{P_k}\geqq 1$ を解くと $k=13$

類 $k=12$

$\boxed{11}$ 0, 5, 25, 80

$\boxed{12}$ (1) $(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \ldots + {}_nC_nb^n$ に $x=1$, $y=1$ を代入する。

(2) $(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \ldots + {}_nC_nb^n$ に $x=1$, $y=2$ を代入する。

(3) $(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \ldots + {}_nC_nb^n$ を微分した式に $x=1$, $y=1$ を代入する。

第１３回　ベクトル（１）

$\boxed{1}$ 1

$\boxed{2}$ $(x-5)^2+(y-5)^2=18$ と $y=kx$ が交点を持つ。$\frac{1}{7} \leqq k \leqq 7$

$\boxed{3}$ 四面体 $ABCD$ の辺 AB, AC, AD, BC, CD, DB の中点をそれぞれ E, F, G, H, I, J と置く。次に線分 EI の中点が重心 O になることを確認する。最後に $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{IG} = 0$ を確認して G が EI を直径とする球上にあることを言う。他も同様にして球上にある。

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{AP} = \frac{7}{9} \times \frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}$ より BC を 4 : 3 に内分する点を Q とすると P は AQ を 7 : 2 に内分する点。面積比は 2 : 3 : 4

$\boxed{5}$ ア a, イ 6, ウ 1, エ 6, オ 8, カ 9, キ 1, ク 4, ケ 9, コ 5, サ 2, シ 2, ス 7, セ 5, ソ 9, タ 8

$\boxed{6}$ (1) $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$\boxed{7}$ (1) 1

(2) $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$

(3) 1

(4) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OP}|^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 - |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| \cos\theta$ であることと $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2\sqrt{5}$ より最大値 $2+2\sqrt{5}$ 、最小値 $2-2\sqrt{5}$

$\boxed{8}$ (1) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{4}{15}\vec{c}$

(2) $k = \frac{4}{3}$

(3) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$

$\boxed{9}$ $|4\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}|^2 = |-6\overrightarrow{OC}|^2$ を計算して $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{8}$ より $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2 = \frac{9}{4}$ であるから $|\overrightarrow{AB}| = \frac{3}{2}$

$\boxed{10}$ 正三角形

$\boxed{11}$ (1) $\overrightarrow{AQ} = \frac{5}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$

$\boxed{12}$ $\overrightarrow{OP}=k(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})$ を $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|$ に代入。$\overrightarrow{OP}=\frac{5}{9}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$

類 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{12}(5\vec{a}+3\vec{b}),\ \ \frac{1}{4}(5\vec{a}+3\vec{b})$

$\boxed{13}$ $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると、$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R,\ \ \overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ 次に $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OG}$ とすると $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2=0$ 同様にして $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ よって D は $\triangle ABC$ の垂心である。すなわち $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

$\boxed{14}$ (1) $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{e}+\frac{1}{2}\vec{d}$

(2) $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{e}+\frac{1}{5}\vec{d}$

$\boxed{15}$ (1) $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}$

$\boxed{16}$ (1) $\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KL}$ をいう。

(2) $\overrightarrow{OP}=s\vec{c},\ \ \overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とすると $\overrightarrow{OR}=\frac{1-t}{2}\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}+\frac{s}{2}\vec{c}$ なので $\overrightarrow{KR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OK}=-\frac{t}{2}\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}+\frac{s}{2}\vec{c}=t\overrightarrow{KL}+s\overrightarrow{KM}$

$\boxed{17}$ $\overrightarrow{AT}=\frac{3}{13}\vec{b}+\frac{3}{13}\vec{c}+\frac{3}{13}\vec{d}$

$\boxed{18}$ (1) $\vec{p}\cdot\vec{a}=4(1-s-t),\ \ \vec{p}\cdot\vec{b}=4s+t,\ \ \vec{p}\cdot\vec{c}=s+t$

(2) $s=\frac{2}{9},\ \ t=\frac{4}{9}$

(3) $BQ : QC=2 : 1,\ \ AR : RC=4 : 3$

(4) $4 : 3 : 2$

類 $\overrightarrow{OH}=-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$ より $|\overrightarrow{OH}|=\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\boxed{19}$ (1) $\frac{\sqrt{91}}{2}$

(2) 17

(3) $-\frac{23}{4}$

(4) $\overrightarrow{OH}=\frac{23}{55}\overrightarrow{OP}+\frac{32}{55}\overrightarrow{OM}$

$\boxed{20}$ (1) $\overrightarrow{AI}=\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{2}{3}\vec{e}$

(2) $k=\frac{9}{7}$

$\boxed{21}$ $OA\perp BC$ なので $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ 同様にして $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ が成り立つ。次に $\triangle OAB=\triangle OBC$ なので $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$ より $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 同様にして $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ が成り立つ。最後に $\triangle OAB=\triangle ABC$ なので $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}-\vec{a}|^2|\vec{c}-\vec{a}|^2-\{(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\}^2}$ であるから $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ と $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ に注意して計算を進めると $|\vec{a}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$ したがって $\cos\angle AOB=\frac{1}{2}$ つまり $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ になる。$|\vec{a}|=|\vec{b}|,\ \ \angle AOB=\frac{\pi}{3}$ であるから $\triangle OAB$ は正三角形になる。同様にしてこの四面体のすべての面は等しい正三角形で構成されていることになる。すなわちこの四面体は正四面体である。

第１４回　ベクトル（２）

$\boxed{1}$ (1) $P(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$, $P(-\cos\theta,\ -\sin\theta,\ 0)$ とすると $\overrightarrow{AP}=(\cos\theta-1,\ \sin\theta-1,\ -1)$, $\overrightarrow{AQ}=(-\cos\theta-1,\ -\sin\theta-1,\ -1)$ より $\cos\angle PAQ=\frac{1}{\sqrt{3-\sin 2\theta}}$ したがって $\angle PAQ$ の最大値 $\frac{\pi}{3}$ 、最小値 $\frac{\pi}{4}$

(2) $\triangle PAQ=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\sin\theta=\sqrt{2-\sin 2\theta}$ より最大値 $\sqrt{3}$ 、最小値 1

$\boxed{2}$ $S(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ -\frac{3}{2})$, $T(\frac{1}{2},\ 2,\ 0)$ のとき $ST=\frac{\sqrt{14}}{2}$

$\boxed{3}$ (1) $6x+3y+2z-6=0$

(2) $\frac{38}{7}$

(3) $\frac{7}{2}$

(4) $\frac{19}{3}$

$\boxed{4}$ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+\frac{13}{4})^2=\frac{425}{16}$

$\boxed{5}$ $E(-5,\ 3,\ 1)$

$\boxed{6}$ (1) $A'(1,\ 2,\ 3)$

(2) $f(A)=2<5$, $f(B)=4<5$

(3) $P(\frac{7}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{4})$ のとき最小値 $\sqrt{11}$

$\boxed{7}$ (1) $H(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$

(2) $P(1,\ 1,\ 0)$, $Q(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$

$\boxed{8}$ (1) $H(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3})$

(2) 中心 $(-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$, $r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(3) $P(\frac{-2+2\sqrt{3}}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2+2\sqrt{3}}{3})$

$\boxed{9}$ $x+y-z-3=0$, $x+y+5z-9=0$

$\boxed{10}$ $x-2y-z=0$, $2x-y+z=0$

類 $P(\pm\sqrt{6},\ 2\pm\sqrt{6},\ \mp\sqrt{6})$ （複号同順）

$\boxed{11}$ (1) $y+2z-3=0$

(2) $\frac{x^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

類 (1) $(u,\ v,\ r)=(5-\cos\theta,\ \cos\theta,\ \pm\sqrt{2-2\cos^2\theta})$

(2) $Y=\frac{10\cos\theta}{5+\cos\theta}$, $Z=\frac{10\sqrt{2}\sin\theta}{5+\cos\theta}$

(3) $\frac{144}{625}(Y+\frac{5}{12})^2+\frac{3}{25}Z^2=1$

第１５回　微分（１）

$\boxed{1}$ (1) $5(x^3+2x^2)^4(3x^2+4x)$

(2) $(x+3)^2(x^2+1)(3x^2+4x+3)$

$\boxed{2}$ $a=-3,\ \ b=-2,$ 値 -3

$\boxed{3}$ 365

$\boxed{4}$ (1) $\alpha+\beta=-2a,\ \ \alpha\beta=b$

(2) $4a^3-6ab+2c$

$\boxed{5}$ x^2+2x-4

類 $a=-n,\ \ b=n-1$

$\boxed{6}$ 底辺 $\frac{4}{3}$ 、高さ $\frac{4}{3}$ のとき最大値 $\frac{64}{81}$

類 高さ $\frac{4}{3}$ 、半径 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 、側面積 $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

$\boxed{7}$ $f(x)=x^2+2x+1,\ \ -\frac{6}{5}x-\frac{39}{25}$

類 $\frac{2}{3}x+\frac{19}{27},\ \ x^3+2x^2+2x+1$

$\boxed{8}$ $p^2-8p-4=0$ と $p \geqq -\frac{3}{8}$ より $p=4+2\sqrt{5},\ \ q$ は任意の実数

$\boxed{9}$ $y+z=-x,\ \ yz=x^2-3$ より $x^3+y^3+z^3=3x^3-9x$ これを微分して $x=-1$ のとき最大値 6 、$x=1$ のとき最小値 -6

第１６回　微分（２）

$\boxed{1}$ $y=7x-2,\ \ y=-x-2$

$\boxed{2}$ $y=0,\ \ y=-4x$

類 (1) $y=(2-2a)x-a^2+2a-1$

(2) $\frac{2}{3}a^3$

$\boxed{3}$ $y=2x-\frac{5}{4}$

$\boxed{4}$ $0<a<\frac{1}{2},\ \ 1<a<\frac{3}{2}$

$\boxed{5}$ $a<-1,\ \ \frac{5}{27}<a$ のとき 1 個、$a=-1,\ \ \frac{5}{27}$ のとき 2 個、$-1<a<\frac{5}{27}$ のとき 3 個

類 (1) $a<-9$ のとき 0 個、$a=-9,\ \ 7<a$ のとき 2 個、$a=7$ のとき 3 個、$-9<a<7$ のとき 4 個

(2) $a<2,\ \ \frac{5}{2}<a$ のとき 1 個、$a=2,\ \ \frac{5}{2}$ のとき 2 個、$2<a<\frac{5}{2}$ のとき 3 個

(3) $p>-\frac{1}{4}$ のとき 1 個、$p=-\frac{1}{4}$ のとき 2 個、$p<-\frac{1}{4}$ のとき 3 個

$\boxed{6}$ $p<-\frac{1}{4}$ のとき 3 個、$p=-\frac{1}{4}$ のとき 2 個、$p>-\frac{1}{4}$ のとき 1 個

$\boxed{7}$ $a<0,\ \ 1<a$ のとき 1 個、$a=0,\ \ 1$ のとき 2 個、$0<a<1$ のとき 3 個

類 $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

$\boxed{8}$ $k=12$ のとき $x=-4,\ 1,\ 3$ 、$k=-12$ のとき $x=-3,\ -1,\ 4$

$\boxed{9}$ $\frac{\sqrt{71+8\sqrt{2}}}{2}$

類 $k=-8$ のとき $x=-1,\ 2,\ 4$

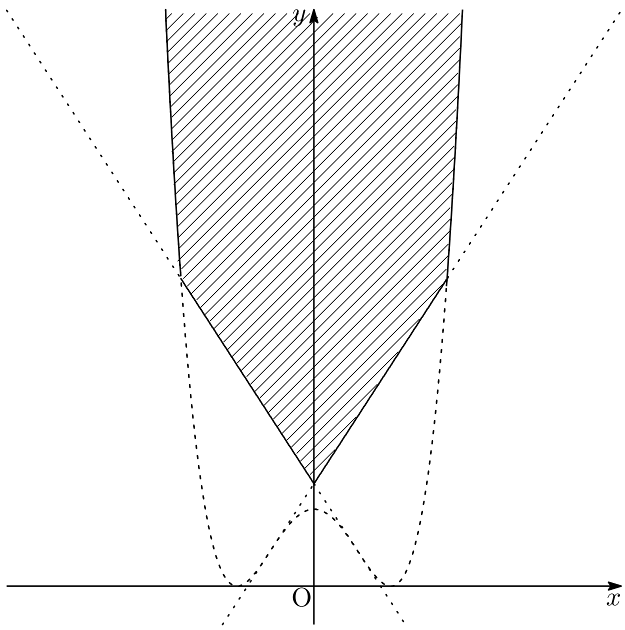
$\boxed{10}$ (1) 負

(2) n が偶数のとき正の解２個、負の解１個、n が奇数のとき正の解２個、負の解０個

類 (1) 数学的帰納法を使う。

(2) $f(x)=x^n-nx+1$ とおくと $f'(x)=nx^{n-1}-n=n(x^{n-1}-1)$ より極地をとる x の値は $x=\pm1$ である。$f(1)=2-n<0,\ \ f(-1)=n>0,\ \ f(2)=2^n-2n+1>0,\ \ f(-2)=-2^n+2n+1<0$ より、方程式 $x^n-nx+1=0$ には実数解が全部で３個あり、それらはすべて -2 より大きく２より小さい。

$\boxed{11}$ $x\leqq-\sqrt{3},\ \ \sqrt{3}\leqq x$ のとき $y\leqq x^4-2x^2+1$ 、$-\sqrt{3}<x\leqq0$ のとき $y\leqq-\frac{8}{3\sqrt{3}}x+\frac{4}{3}$ 、$0\leqq x<\sqrt{3}$ のとき $y\leqq\frac{8}{3\sqrt{3}}x+\frac{4}{3}$



第１７回　積分（１）

$\boxed{1}$ $0<x<1$ において $f(x)=0$ となる x の値を $x=\alpha$ とすると、グラフより $\displaystyle\int_{-1}^{\alpha}f(x)dx\geqq1,\ \ \int_{\alpha}^{1}f(x)dx\geqq-2$ である。また $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{\alpha}f(x)dx+\int_{\alpha}^{1}f(x)dx$ であるから、$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx\geqq-1$ である。

$\boxed{2}$ (1) $b=0,\ \ c=-\frac{1}{3}a$

(2) $a=\frac{3}{2},\ \ b=0,\ \ c=-\frac{1}{2}$

$\boxed{3}$ (1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(2) $\frac{343}{24}$

$\boxed{4}$ $\frac{64}{27}$

$\boxed{5}$ $\frac{27}{4}$

$\boxed{6}$ $a=\frac{5}{2}$

類 (1) $F(t)=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, $F(t)=t^2-\frac{1}{3}$ $(1 \leqq t)$

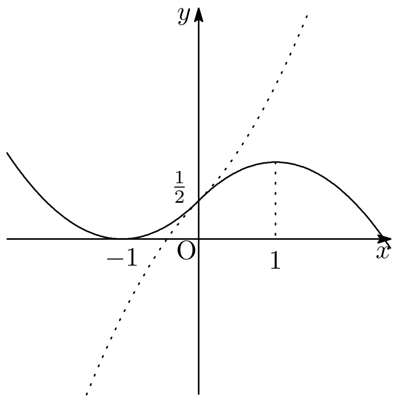
(2) $t=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$

$\boxed{7}$ $a \geqq 1$ のとき $S=5a-\frac{7}{3}$ 、$0 \leqq a < 1$ のとき $S=\frac{8}{3}a^3-3a+3$ になるので $a=\frac{\sqrt{6}}{4}$ のとき最小値 $\frac{6-\sqrt{6}}{2}$

類 (1) $f(0)=a>0$, $f(\frac{1}{2})=a-1<0$, $f(1)=a+1>0$ より $f(x)$ は $0<x<1$ の範囲に２つの相異なる実数解をもつ。

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f'(x)|dx=\int_\alpha^{\frac{1}{2}} -12x^2+3dx+\int_{\frac{1}{2}}^\beta 12x^2-3dx=(4\alpha^3-3\alpha)+(4\beta^3-3\beta)+2=$ $-2a+2=a$ より $a=\frac{2}{3}$

$\boxed{8}$ $-1<x<0$ のとき $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$、$x \geqq 0$ のとき $F(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$



$\boxed{9}$ $\frac{4}{3}$

$\boxed{10}$ $\frac{32}{3}$

$\boxed{11}$ $y=x^2+9$

類 $y=x^2+\frac{6^{\frac{2}{3}}}{4}$

$\boxed{12}$ (1) $C(\frac{a+b}{2},\ ab)$, $D(\frac{a+b}{2},\ (\frac{a+b}{2})^2)$, $M(\frac{a+b}{2},\ \frac{a^2+b^2}{2})$

(2) $1 : 1$

(3) $2 : 1$

類 (1) $\frac{1}{8}$

(2) $\frac{6}{7}S$

$\boxed{13}$ (1) $y=2ax-a^2$

(2) $y=-\frac{1}{2a}x-\frac{1}{16a^2}$

(3) $S(a)=\frac{1}{6}(a+\frac{1}{4a})^3$

(4) $a=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{6}$

(5) $T(a)=\frac{1}{12}(a+\frac{1}{4a})^3$

$\boxed{14}$ $a=0$, $b=\frac{1}{4}$, 最小値$\frac{1}{12}$

第１８回　積分（２）

$\boxed{1}$ (1) $(-\frac{b}{3a},\ \frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d)$

(2) $y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフを $(-\frac{b}{3a},\ \frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d)$ だけ平行移動すると $y=ax^3+(-\frac{b^2}{3a}+c)x$ になるので $a=A$, $-\frac{b^2}{3a}+c=B$ とおくと $y=Ax^3+Bx$ と表せる。

(3) $f(-x)=-f(x)$ より原点対称である。

(4) 1 : 2

$\boxed{2}$ (1) $x=-2a$

(2) $S_1=\frac{27}{4}a^4$

(3) $x=-a$, $c=-4a^3$

(4) $x=2a$

(5) $S_2=\frac{27}{4}a^4$

$\boxed{3}$ (1) 1 : 2

(2) 1 : 8

$\boxed{4}$ 1 : 16

類 (1) $x=t$ に関して対称であるとすると $f(t+\alpha)=f(t-\alpha)$ より $(4t+a)\alpha^3+(4t^3+3at^2+2bt+c)\alpha=0$ が得られる。α に関して一次独立より $4t+a=0$ かつ $4t^3+3at^2+2bt+c=0$ なので $\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c=0$

(2) $f(x)$ が２つの２次関数 $g(x)=x^2+px+q$, $h(x)=x^2+rx+s$ を使って $g(h(x))$ で表されるとすると $g(h(x))=(x^2+rx+s)^2+p(x^2+rx+s)+q=x^4+2rx^3+(r^2+2s+p)x^2+(pr+2rs)x+(ps+q+s)$ が得られる。$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ と係数比較することにより $a=2r$, $b=r^2+2s+p$, $c=pr+2rs$ なので $\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c=0$ が成り立つ。

$\boxed{5}$ (1) $f(0)=0$

(2) $f'(x)=x^2+a$

(3) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax$

$\boxed{6}$ (1) $f_n(1)=f_n'(1)=0$

(2) $f_1(x)=x^2-2x+1$, $f_2(x)=x^3-3x+2$

(3) $\frac{4n}{2n+1}$

$\boxed{7}$ (1) 数学的帰納法による証明

(2) $f_n(x)=\frac{4}{3}(1-\frac{1}{4^n})x^2+3(1-\frac{2}{3^n})x-\frac{1}{2^{n-2}}$

$\boxed{8}$ $-\frac{10}{27}$, $\frac{46}{27}$

$\boxed{9}$ $P_1(x)=x$, $P_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$, $P_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x$

$\boxed{10}$ (1) $f(x)=x$, $g(x)=2x-\frac{5}{2}$

(2) $f(x)=-18x-12$

$\boxed{11}$ (1) $f(x)=-\frac{3}{2}x^2-2x+1$

(2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{3}x+1$, $g(x)=x^2-x+\frac{5}{3}$

(3) $a=-8$, $f(x)=3x^2+8x-7$, $g(x)=x^2+4x+1$

$\boxed{12}$ (1) $x=0$ のとき極大値 $\frac{1}{4}$、$x=1$ のとき極小値 $-\frac{1}{4}$

(2) i. $-\frac{34}{15}$

ii. $x=-\frac{a}{2}$

$\boxed{13}$ $f(x)=x^3-\frac{15}{31}x^2-\frac{12}{35}x-\frac{18}{31}$

類 $f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$, $C=\frac{5}{24}$

第１９回　円と直線

$\boxed{1}$ (1) $-3x+4y=25$

(2) $3x+4y=36$

(3) $3x+y=17$

$\boxed{2}$ (1) $y=2$, $4x-3y=10$

(2) $2x+y=5$, $-x+2y=5$

$\boxed{3}$ (1) $x-2y-2=0$

(2) $(2,\ 0)$, $(\frac{2}{5},\ -\frac{4}{5})$

(3) $(x-\frac{3}{2})^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$

$\boxed{4}$ $(x+\frac{9}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{49}{2}$

$\boxed{5}$ 中心 $(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3})$ 、半径 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

類 (1) $y=-3x+6$ $(x\leqq-119,\ 1\leqq x)$

(2) $x=1$ のとき最小値 $\sqrt{5}$

$\boxed{6}$ 弦の中点 $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ 、弦の長さ $\sqrt{14}$

$\boxed{7}$ 弦の中点 $(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5})$ 、弦の長さ $\frac{2\sqrt{30}}{5}$

$\boxed{8}$ 6

$\boxed{9}$ 外心 $(7,\ \frac{33}{8})$ 、内心 $(8,\ 4)$

$\boxed{10}$ $k=-9,\ 4$

$\boxed{11}$ $y=\pm\frac{1}{\sqrt{15}}(x+1),\ \ y=\pm\frac{1}{\sqrt{7}}(3x-1)$

$\boxed{12}$ $a\neq\frac{1}{5},\ \ (-1,\ 0)$

$\boxed{13}$ 最小値 $2ab$ 、l ： $y=-\frac{b}{a}x+2b$

$\boxed{14}$ (1) $y=x^2-6x+11$

(2) $y=-x^2-6x-9$

(3) $9x^2-24xy+16y^2+34x-87y+121=0$

$\boxed{15}$ (1) $D>0$

(2) $\frac{|3a-2|}{\sqrt{2a^2-2a+1}}$

(3) $a=-1$

$\boxed{16}$ (1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqq k\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) 方べきの定理より $OP\cdot OQ=3$

(3) P と Q の中点を M とすると $M(\frac{2}{k^2+1},\ \frac{2k}{k^2+1})$, $R(\frac{3}{2},\ \frac{3k}{2})$ なので $OR(OP+OQ)=2OR\cdot(\frac{OP+OQ}{2})=2OR\cdot OM=2\times\frac{3\sqrt{k^2+1}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}=6$

$\boxed{17}$ (1) $(0,\ 4),\ (4,\ 0)$

(2) $\frac{6-3\sqrt{2}}{2}<a<\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$ のとき２個、$a=\frac{6\pm3\sqrt{2}}{2}$ のとき１個、$a<\frac{6-3\sqrt{2}}{2},\ \frac{6+3\sqrt{2}}{2}<a$ のとき０個

第２０回　軌跡と領域

$\boxed{1}$ $y=3x^2-16x+20$

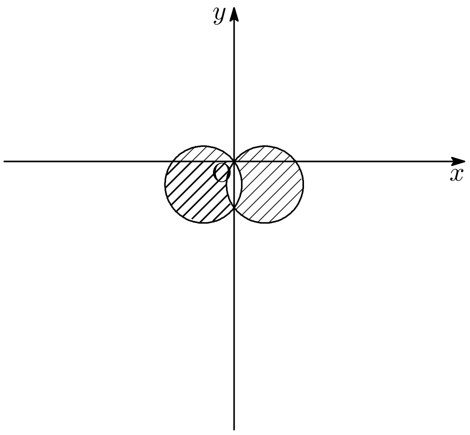
$\boxed{2}$ $x-5y+6=0,\ \ 5x+y-2=0$

$\boxed{3}$ (1) $OP\cdot OP'=1$

(2) 直線 OP と直線 OP' が同じ

(3) 中心 $(\frac{1}{4},\ \frac{1}{8})$ 、半径 $\frac{\sqrt{5}}{8}$ の円

$\boxed{4}$ $(x+\frac{2}{5})^2+(y+\frac{3}{10})^2>\frac{1}{4},\ \ (x-\frac{2}{5})^2+(y+\frac{3}{10})^2<\frac{1}{4}$ または $(x+\frac{2}{5})^2+(y+\frac{3}{10})^2<\frac{1}{4},\ \ (x-\frac{2}{5})^2+(y+\frac{3}{10})^2>\frac{1}{4}$

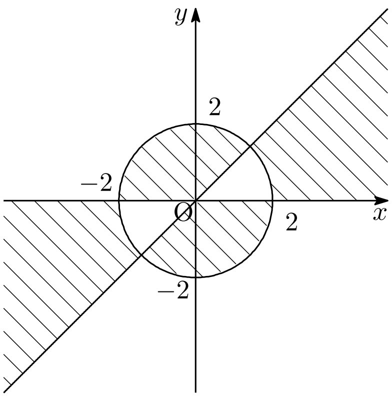


類　(1) 円Cが中心 $(r,\ 0)$ 、半径 r の円であるとしても一般性を失わない。P $(x,\ y)$ 、Q $(X,\ Y)$ とすると反転であるから $x=\frac{X}{X^2+Y^2}$，$y=\frac{Y}{X^2+Y^2}$ の関係が成り立つので、これらを $(x-r)^2+y^2=r^2$ に代入すると $(X^2+Y^2)(1-2rX)=0$ となる。$X^2+Y^2>0$ であるから $X=\frac{1}{2r}$

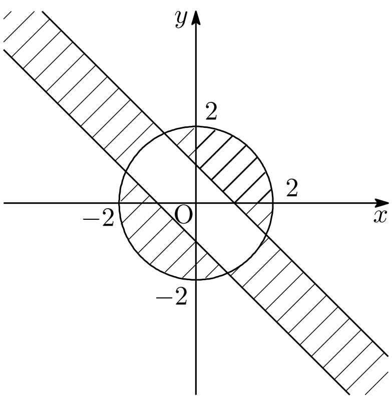
(2) $0<\frac{1}{2r}<2r$ より $\frac{1}{2}<r$

$\boxed{5}$　(1) $\left(\frac{6t}{t^2+1},\ \frac{3t^2-3}{t^2+1}\right)$

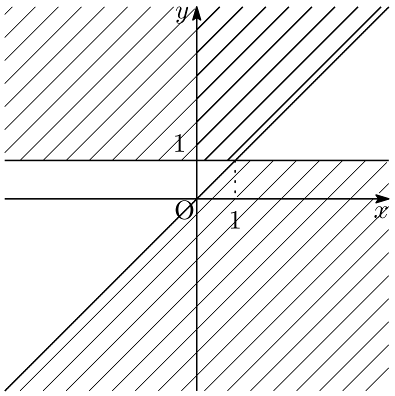
(2) $x^2+y^2=9$ ただし $(0,\ 3)$ を除く。



$\boxed{6}$　(1)

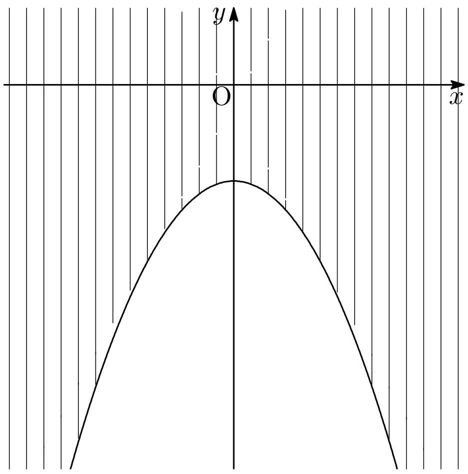


(2)

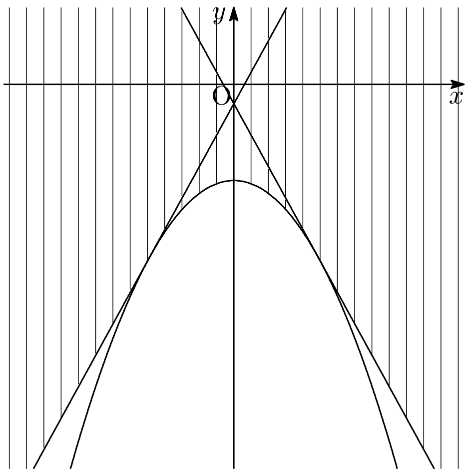


ただし境界は $y=1$ は含むが、$y=x$ は含まない

$\boxed{7}$ (1) $y \geqq -\frac{1}{4}x^2-5$



(2) $a \leqq -2$ のとき $y \geqq 2x-1$ 、$-2 \leqq a \leqq 2$ のとき $y \geqq -\frac{1}{4}x^2-5$ 、$2 \leqq a$ のとき $y \geqq -2x-1$

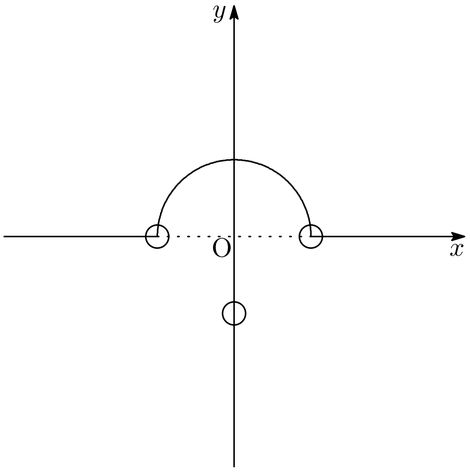


$\boxed{8}$ $\frac{4}{3}$

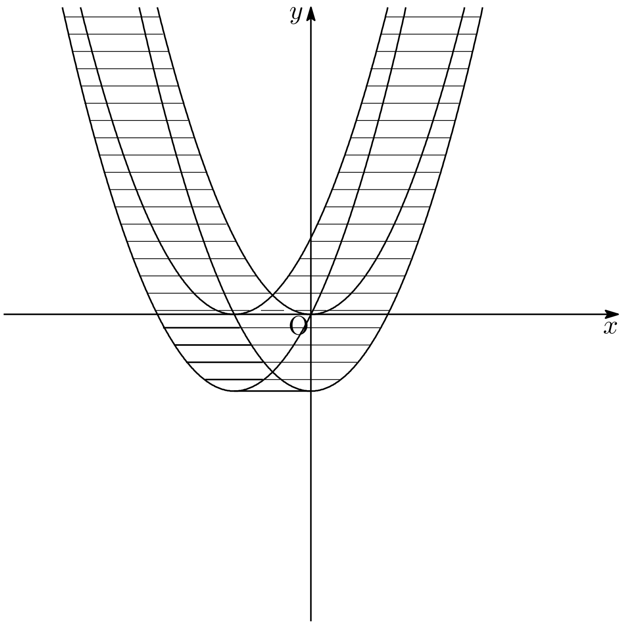
$\boxed{9}$ (1) $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{2}$ と $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ の $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ の部分

(2) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{10}$ $y=0\ \ (x<-1,\ \ 1<x),\ \ x=0,\ \ x^2+y^2=1\ \ (y>0)$



$\boxed{11}$ $a \leqq -1$ のとき $a^2+2a \leqq b \leqq a^2$ 、$-1<a \leqq -\frac{1}{2}$ のとき $-1 \leqq b \leqq a^2$ 、$-\frac{1}{2}<a \leqq 0$ のとき $-1 \leqq b \leqq (a+1)^2$ 、$0<a$ のとき $a^2-1 \leqq b \leqq (a+1)^2$



第２１回　集合と論証

$\boxed{1}$ A 61, B 54, C 75

$\boxed{2}$ $a_1=1,\ \ a_2=2,\ \ a_3=3,\ \ a_4=4,\ \ a_5=6$

$\boxed{3}$ 対偶証明法を使う。

(1) 偽 : 対偶 「$a,\ b$ のどちらか一方が 5 の倍数でないならば、a^2+b^2 は 5 の倍数ではない。」判例 $a=3,\ \ b=4$

(2) 真 : 対偶 「$a,\ b$ のどちらか一方が 3 の倍数でないならば、a^2+b^2 は 3 の倍数ではない。」

$\boxed{4}$

(1) 十分

(2) 何条件でもない

(3) 必要

(4) 必要

(5) 必要十分

(6) 必要

(7) 何条件でもない

(8) 十分

(9) 十分

(10) 何条件でもない

(11) 何条件でもない

(12) 十分

(13) 必要

(14) 必要

(15) 必要

(16) 必要十分

(17) 必要

(18) 必要

(19) 十分

(20) 必要十分

(21) 必要

(22) 必要十分

(23) 必要十分

(24) 十分

(25) 何条件でもない

(26) 十分

$\boxed{5}$ ア 2 、イ 5 、ウ 3 、エ 0 、オ 1 、カ -7 、キ iv

$\boxed{6}$ ア 2 、イ 3 、ウ 3 、エ 2 、オ -1 、カ 十分条件 、キ 必要十分条件

$\boxed{7}$ ア 11 、イ 13 、ウ 4 、エ 15

$\boxed{8}$ ア 必要十分条件 、イ 十分条件 、ウ 必要十分条件 、エ (2)

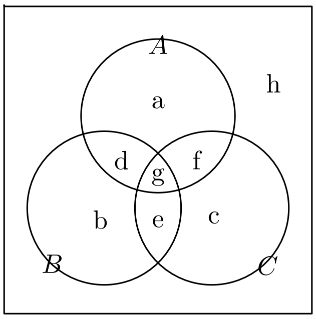
$\boxed{9}$

(1) 2

(2) 「$|a+b| \geqq 1$ かつ $|a-2b| \geqq 2 \implies (a+b)^2+(a-2b)^2 \geqq 5$」

(3) 十分条件

$\boxed{10}$ 図のように各領域を $a \sim h$ とすると $n(B \cup C) = 50$, $n(B) = 46$ より $c + f = 4$ よって $0 \leqq c \leqq 4$ 。また $n(B \cup C) = 50$ より $a + h = 50$ 、$n(A \cup C) = 88$ より $b + h = 12$ なので $a + b + 2h = 62$ 。仮定より $a + b + c = 61$ であることをあわせて考えると $2h = c + 1$ よって c は奇数になる。$0 \leqq c \leqq 4$ より $c = 1$ or 3 。したがって解は (48, 10, 3, 5, 2) または (49, 11, 1, 3, 1) になる。



第２２回　確率

$\boxed{1}$ (1) 30 通り

(2) 15 通り

(3) 6 通り

$\boxed{2}$ (1) 24 通り

(2) 24 通り

(3) 8 通り

(4) 32 通り

(5) 16 通り

$\boxed{3}$ (1) 27720 通り

(2) 9240 通り

(3) 5775 通り

(4) 15400 通り

(5) 51975 通り

類 1350 通り

$\boxed{4}$ (1) 32 通り

(2) 30 通り

(3) 15 通り

$\boxed{5}$ (1) 243 通り

(2) 150 通り

(3) 25 通り

$\boxed{6}$ (1) 792 通り

(2) 350 通り

(3) 120 通り

(4) 282 通り

類 (1) 210 通り

(2) 110 通り

(3) 25 通り

(4) 76 通り

$\boxed{7}$ 54 通り

$\boxed{8}$ 54 通り

$\boxed{9}$ (1) 10 通り

(2) 28 通り

$\boxed{10}$ (1) 36 通り

(2) 66 通り

類 $\frac{(n-1)(n-3)}{4}$ 通り

$\boxed{11}$ (1) $\frac{6}{11}$

(2) $\frac{73}{165}$

類 $\frac{{}_{33}C_3+{}_{34}C_3+{}_{33}C_3+{}_{33}C_1\times{}_{34}C_1\times{}_{33}C_1}{{}_{100}C_3} = \frac{817}{2450}$

$\boxed{12}$ $\frac{2}{9}$

$\boxed{13}$ $\frac{13}{27}$

$\boxed{14}$ $\frac{3^n-3\cdot2^n+6}{3^n}$

$\boxed{15}$ (1) $(\frac{5}{6})^n-(\frac{2}{3})^n$

(2) $(\frac{5}{6})^n-(\frac{2}{3})^n$

(3) $(\frac{2}{3})^n-(\frac{1}{2})^n\times2+(\frac{1}{3})^n$

$\boxed{16}$ (1) $p(m)=1-(\frac{m-1}{n})^k$

(2) $q(m)=(\frac{m}{n})^k-(\frac{m-1}{n})^k$

(3) $\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$

$\boxed{17}$ (1) $P_n=1-(\frac{2}{3})^n$

(2) $Q_n=1-(\frac{1}{2})^n-(\frac{n}{3})\times(\frac{1}{2})^{n-1}$

(3) $R_n=1-(\frac{2}{3})^n-(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^n$

類 $\frac{n^3+15n^2+14n+6}{6^{n+1}}$

$\boxed{18}$ (1) $\frac{5}{27}$

(2) $(2n-1)\times(\frac{1}{3})^n$

$\boxed{19}$ $\frac{1}{2}$

$\boxed{20}$ $\frac{3}{4}$

類 $p+2p^2-7p^4+7p^5-2p^6$

$\boxed{21}$ (1) $P_n=\frac{630n}{(15+n)(14+n)(13+n)}$

(2) $n=7$, $P_7=\frac{21}{44}$

$\boxed{22}$ (1) $P_1=\frac{1}{3}$, $P_{n+1}=\frac{1}{3}P_n+\frac{1}{3}$

(2) $P_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\times(\frac{1}{3})^{n-1}$

$\boxed{23}$ n が奇数のとき $\frac{3(n-1)}{2n(n-2)}$ 、n が偶数のとき $\frac{3}{2(n-1)}$

$\boxed{24}$ $\frac{2}{3n(n+1)}$

$\boxed{25}$ $\frac{25}{864}\{1-(\frac{5}{6})^{n-6}-(\frac{2}{3})^{n-6}+(\frac{1}{2})^{n-6}\}$

第２３回　放物線と図形

$\boxed{1}$ $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $G(0,\ \frac{4\sqrt{3}}{3})$

$\boxed{2}$ (1) $0\leqq s\leqq\frac{1}{2}$のとき $s=r$, $s<0$ のとき $s=-r$

(2) $0<a\leqq 1$ のとき $r=\frac{a}{2}$ 、$1<a$ のとき $r=\frac{-1+2\sqrt{a}}{2}$

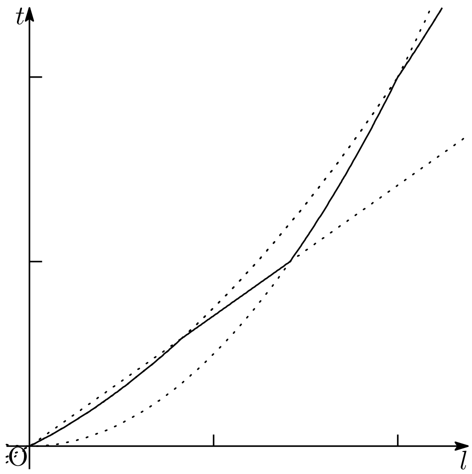
$\boxed{3}$ $x^2+(y+\frac{-5+\sqrt{2}}{2})^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{4}$ (1) $\frac{1}{2}$

(2) $a_n=\sqrt{2b_{n-1}}+\frac{1}{2}$

(3) $a_n=n-\frac{1}{2}$

$\boxed{5}$ $0<l\leqq 2\sqrt{2}-2$ のとき $t=\frac{1}{4}l^2+\frac{1}{2}l$ 、$2\sqrt{2}-2<l\leqq\sqrt{2}$ のとき $t=\frac{\sqrt{2}}{2}l$ 、$\sqrt{2}<l\leqq 2$ のとき $t=\frac{1}{2}l^2$ 、$2<l$ のとき $t=\frac{1}{4}l^2+\frac{1}{2}l$



$\boxed{6}$ $0 < l \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき $y = \frac{1}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}t$ 、$\frac{2\sqrt{3}}{3} < t \leqq 2\sqrt{3}$ のとき $y = \frac{\sqrt{3}}{3}t$ 、$2\sqrt{3} < t$ のとき $y = \frac{1}{4}t^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}t$

$\boxed{7}$ 点 $P(p,\ p^2),\ Q(q,\ q^2)$ とおくと PQ の傾きについて $\frac{p^2-q^2}{p-q} = \sqrt{2}$ より $p+q = \sqrt{2} \longrightarrow p^2 + 2pq + q^2 = 2 \cdots (a)$ また $\overline{PQ} = \sqrt{3}$ より $\sqrt{3}(q-p) = a \longrightarrow p^2 - 2pq + q^2 = \frac{a^2}{3} \cdots (b)$
(a) と (b) より $p^2 + q^2 = \frac{a^2+6}{6}$ になる。
一方 PQ の中点を M とすると $M(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{a^2+6}{12})$ さらに RM の傾きは $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ であることと、$RM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ であることから $R(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \ \frac{a^2+6}{12} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a) = (\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a),\ \ \frac{a^2+6a+6}{12})$ これを $y = x^2$ に代入して $\frac{a^2+6a+6}{12} = \frac{a^2-2a+1}{2} \longrightarrow a(5a-18) = 0$ になる。
よって $a > 0$ より $a = \frac{18}{5}$

$\boxed{8}$
(1) $p^2 + q^2 + r^2 = -3(pq + qr + rp) - 3$
(2) $y = 9x^2 + 2$

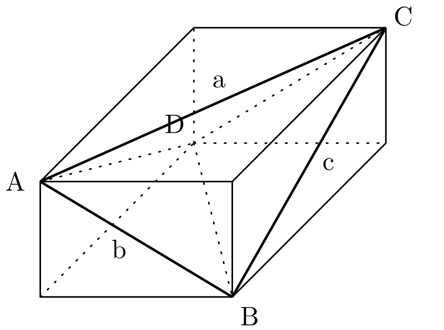
第２４回　等面四面体

$\boxed{1}$
(1) 1 ： 2
(2) $\frac{1}{3}abc$

$\boxed{2}$ $V(l) = \frac{2l^2}{3}\sqrt{2l^2+1}\sqrt{l+2}\sqrt{l-2}$ より $\displaystyle\lim_{l \to 2} \frac{V(l)}{\sqrt{l-2}} = 8$

$\boxed{3}$
(1) PR の中点を M 、QS の中点を N とおき $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ であることを証明する。
(2) $x^2+y^2 = a^2,\ y^2+z^2 = b^2,\ z^2+x^2 = c^2$ より $x = \sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}},\ y = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}},\ z = \sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$ これを $V = \frac{1}{3}xyz \times \frac{1}{2}$ に代入して $V = \frac{\sqrt{2}}{24}(\sqrt{a^2+c^2-b^2})(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$

$\boxed{4}$ $CA = a,\ AB = b,\ BC = c$ とおくと $\triangle ABC$ は鋭角三角形なので $a^2+b^2-c^2 > 0,\ b^2+c^2-a^2 > 0,\ c^2+a^2-b^2 > 0$ を満たす。$x = \sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}},\ y = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}},\ z = \sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$ とおくと $x^2+y^2 = a^2,\ y^2+z^2 = b^2,\ z^2+x^2 = c^2$ よって図のような直方体が存在し、このとき各面すべてが $\triangle ABC$ と合同である。



$\boxed{5}$ 最大値 $\frac{1}{2}$ 、最小値 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 正射影の面積を底面積と考えると三角錐または四角錐の体積は（底面積）×（高さ）$\times\frac{1}{3}$ であるから体積一定のとき高さが最大になるように置けば底面積は最小になる。逆に体積一定のとき高さが最小になるように置けば底面積は最大になる。

第２５回　公式の証明

$\boxed{1}$ 略

$\boxed{2}$ $a = b\cos C + c\cos B \cdots \times a,\quad b = c\cos A + a\cos C \cdots \times b,\quad c = a\cos B + b\cos A \cdots \times c$ を $b^2 + c^2 - a^2$ に代入して計算する。

$\boxed{3}$ $ax + by + c = 0,\quad \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{b}{a}$ を $l = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ に代入して計算する。

$\boxed{4}$ $x^2 + y^2 = r^2$ を微分して $2x + 2yy' = 0$ より傾きを出す。

$\boxed{5}$ オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を使うかまたは幾何的に解く。

$\boxed{6}$ オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を使うかまたは数学的帰納法で解く。

$\boxed{7}$ $\log_a b = X,\ \log_a c = Y,\ \log_a bc = Z$ とおくと $b = a^X,\ c = a^Y,\ bc = a^Z$ より $a^{X+Y} = a^Z$ したがって $X + Y = Z$

$\boxed{8}$ $\log_a b = X,\ \log_c b = Y,\ \log_c a = Z$ とおくと $b = a^X,\ b = c^Y,\ a = c^Z$ より $c^Y = c^{XZ}$ したがって $X = \frac{Y}{Z}$

$\boxed{9}$

$$n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) = 3n^2 + 3n$$

$$\vdots$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2$$

より

$$n(n+1)(n+2) - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3(2^2 + \cdots + n^2) + 3(2 + \cdot + n)$$

したがって

$$n^3+3n^2+2n-6=3(\sum_{k=1}^{n}k^2-1^2)+3(\sum_{k=1}^{n}k-1)$$

これに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ を代入して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ を求める。

$\boxed{10}$ $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ を利用する。

$\boxed{11}$

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

一方成分計算では

$$|\overrightarrow{AB}|^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2(a_1b_1+a_2b_2)$$
$$=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2(a_1b_1+a_2b_2)$$

$\boxed{12}$ 略

$\boxed{13}$ 数学的帰納法を使う。

第２６回　円周角

$\boxed{1}$ 68°

$\boxed{2}$ $\frac{15}{8}$

$\boxed{3}$

(1) $\triangle EBD$ と $\triangle AIF$ において $\angle EBD=\angle AFI=90^\circ$, $\angle BED=\angle BAD=\angle FAI$ より二角相等なので $\triangle EDB\backsim\triangle AIF$ よって $BD:FI=DE:IA$

(2) I は $\triangle ABC$ の内心なので $\angle BAI=\angle IAC=a$, $\angle ABI=\angle IBC=b$ とすると $\triangle DBI$ において $\angle DBI=\angle DBC+\angle IBC=\angle IAC+\angle IBC=a+b$, $\angle DIB=\angle IAB+\angle ABI=a+b$ よって $\angle DBI=\angle DIB$ したがって $ID=BD$

(3) $AI\cdot ID=2rR$

$\boxed{4}$

(1) 16

(2) 5 : 3

(3) 14

$\boxed{5}$ 点 A における接線 XY をひき、線分 AB, AC と内円の交点を E, F とすると $\triangle AED$ と $\triangle DFC$ において $\angle ADE=\angle BAY=\angle DCF$ (接弦定理), $\angle AED=\angle DFC$ (円に内接する四角形) より $\triangle AED\backsim\triangle DFC$ よって $\angle DAE=\angle CDF$ 一方 D は内円の接点でもあるから接弦定理より $\angle CDF=\angle DAF$ したがって $\angle DAE=\angle DAF$

$\boxed{6}$

(1) $\angle BAC=\angle BFC$ (円周角), $\angle BAC=\angle CEA$ (仮定) より $\angle BFC=\angle CEA$ 同位角が等しいので $BF\parallel DE$ よって $\angle AFB=\angle FAE$ (錯角) また接弦定理により $\angle FAE=\angle ABF$ であるから $\angle AFB=\angle ABF$

(2) $\triangle ADB$ と $\triangle AEF$ において (1) より $AB = AF$, $\angle EAF = \angle AFB = \angle ABF = \angle DAB$ 仮定より $\angle BDA = \angle FEA$ であるから、残りの角も等しく $\angle ABD = \angle AFE$ よって一辺両端角相等により $\triangle ADB \equiv \triangle AEF$ したがって $DA = AE$

$\boxed{7}$ (1) 7

(2) $\frac{31}{7}$

$\boxed{8}$ (1) $60°$

(2) 2 : 1

(3) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$

$\boxed{9}$ ア E 、イ A 、ウ I 、エ B 、オ I 、カ 6 、キ 0 、ク 8 、ケ 7 、コ 5 、サ 2 、シ 1 、ス 5 、セ 7 、ソ 3 、タ 3 、チ 6 、ツ 3 、テ 2 、ト 3 、ナ 3

$\boxed{10}$ (1) ア $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

(2) イ $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$

(3) ウ $\frac{2}{ab+cd}$

(4) エ $\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}$

類 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{1}{2}bc\sqrt{(1+\cos A)(1-\cos A)}$ に余弦定理を適用する。